Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques.

Académie de la Polynésie Française.

Introduction à la théorie des probabilités.

Tearii CRIDLAND

20 septembre 2019

1 Espaces probabilisés

<u>DÉFINITION 1.1 :</u> Soit E un ensemble non vide et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On appelle **tribu** de E un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathscr{P}(E)$ tel que :
- $E \in \mathcal{T}$.
- $\forall X \in \mathcal{T}, E \setminus X \in \mathcal{T}$.
- Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$ alors on a $\bigcup_{i\in I} X_i \in \mathcal{T}$.

On dit que les éléments de $\mathcal{T}$ sont des **évènements** et que $(E, \mathcal{T})$ est un **espace probabilisable** ou encore que $(E, \mathcal{T})$ est un **espace mesurable**.

Remarque 1.1 : Une tribu est stable par les opérations ensemblistes (réunion, différence, intersection) lorsqu'elles sont effectuées de manière dénombrable.

<u>DÉFINITION 1.2 :</u> Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On appelle **mesure** sur $(E, \mathcal{T})$ une application μ de $\mathcal{T}$ vers $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que :
- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints alors on a $\mu\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(X_i)$.

On dit que le triplet $(E, \mathcal{T}, \mu)$ est un **espace mesuré**.

Remarque 1.2 : Une mesure est une application croissante au sens de l'inclusion. La définition a bien un sens car une série à termes positifs qui est majorée est commutativement convergente.

<u>DÉFINITION 1.3 :</u> Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(E, \mathcal{T})$ une mesure $\mathbb{p}$ sur $(E, \mathcal{T})$ telle que $\mathbb{p}(E) = 1$. On dit que le triplet $(E, \mathcal{T}, \mathbb{p})$ est un **espace probabilisé**.

<u>EXEMPLE 1.1 :</u> Soit E un ensemble fini et non vide, si l'on note $\forall A \in \mathscr{P}(E), \mathbb{p}(A) = |A|/|E|$ alors $\mathbb{p}$ est une probabilité sur $(E, \mathscr{P}(E))$.

Remarque 1.3 : C'est l'exemple le plus classique d'espaces probabilisés étudié dès le collège. Cette probabilité est appelé la probabilité uniforme sur $(E, \mathscr{P}(E))$.

<u>EXEMPLE 1.2 :</u> Soit E un ensemble infini dénombrable et $(p_i)_{i\in E}$ une famille de réels positifs telle que $\sum_{i\in E} p_i = 1$, si l'on note $\forall A \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}, \mathbb{p}(A) = \sum_{i\in A} p_i$ et $\mathbb{p}(\emptyset) = 0$ alors $\mathbb{p}$ est une probabilité sur $(E, \mathscr{P}(E))$.

Remarque 1.4 : Il s'agit de l'exemple classique d'un espace probabilisé infini dénombrable. On dit que la famille $(p_i)_{i\in E}$ est le germe de cette probabilité.

<u>PROPRIÉTÉ 1.1 :</u> Soit E un ensemble non vide et A un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$, une intersection de tribus de E contenant A est une tribu de E contenant A.

<u>DÉFINITION 1.4 :</u> Soit E un ensemble non vide et A un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$, l'intersection de toutes les tribus de E contenant A est appelé la **tribu** de E **engendrée** par A.

<u>DÉFINITION 1.5 :</u> Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$, si $\mathcal{O}$ désigne l'ensemble des ouverts de A alors la tribu de $\mathbb{R}^d$ engendrée par $\mathcal{O}$ est appelée la **tribu borélienne** de A et notée $\mathscr{B}_A$. Les éléments de $\mathscr{B}_A$ sont appelé les **boréliens** de A. La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est notée plus simplement $\mathscr{B}$.

Remarque 1.5 : La tribu des boréliens est la plus petite tribu de $\mathbb{R}^d$ contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Pour créer des boréliens on peut faire de manière dénombrable des passages au complémentaire, des réunions ou des intersections avec des ouverts de $\mathbb{R}^d$.

<u>PROPRIÉTÉ 1.2 :</u> $\mathscr{B}$ est engendrée par l'ensemble $\mathcal{I}$ des intervalles ouverts et bornés.

Remarque 1.6 : Les intervalles ouverts et bornés sont de la forme $]a,b[$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En particulier si $J \in \mathcal{I}$ alors le réel $\lambda(J) = b - a$ est appelé la longueur de l'intervalle. On montre que $\mathscr{B}$ est aussi engendrée par chaque type d'intervalle (le type ouvert non borné et différent de $\mathbb{R}$, le type fermé borné et le type fermé non borné).

<u>EXEMPLE 1.3 :</u> Tous les fermés de $\mathbb{R}$ sont des boréliens ainsi que les parties finies ou dénombrables.

Remarque 1.7 : Il n'est pas facile de construire une partie de $\mathbb{R}$ non borélienne. On peut trouver dans certains ouvrages la construction d'une partie de $\mathbb{R}$ non borélienne en utilisant l'axiome du choix.

<u>PROPRIÉTÉ 1.3 :</u> $\forall d \in \mathbb{N}^*$, la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ est engendrée par $\mathcal{P} = \left\{\prod_{k=1}^d J_k | \forall k \in [\![1,d]\!], J_k \in \mathcal{I}\right\}$ l'ensemble des pavés ouverts et bornés.

Remarque 1.8 : Si A est une partie de $\mathbb{R}^d$ alors les boréliens de A sont de la forme $X \cap A$ où X est un borélien de $\mathbb{R}^d$.

<u>DÉFINITION 1.6 :</u> Soit $X \in \mathcal{P}$ noté $\prod_{k=1}^d J_k$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in [\![1,d]\!], J_k \in \mathcal{I}$, le **volume** de X est le réel positif $\mathrm{Vol}(X) = \prod_{k=1}^d \lambda(J_k)$.

<u>THÉORÈME 1.1 :</u> Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique mesure λ sur $(A, \mathscr{B}_A)$ telle que $\forall X \in \mathcal{P}, \lambda(X) = \mathrm{Vol}(X)$.

<u>DÉFINITION 1.7 :</u> La mesure λ définie par le théorème précédent sur $(A, \mathscr{B}_A)$ est appelée la **mesure de Lebesgue**.

Remarque 1.9 : Comme les ensembles $\mathcal{I} \cup \{\emptyset\}$ et $\mathcal{P} \cup \{\emptyset\}$ sont stables par intersections on peut obtenir la mesure de Lebesgue d'un borélien lorsque l'on connait une suite d'opérations ensemblistes qui a permis de construire ce borélien à partir d'éléments de $\mathcal{P}$.

<u>PROPRIÉTÉ 1.4 :</u> Soit E un borélien de $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ dont la mesure de Lebesgue est non nulle et non infinie, si on note $\mathbb{p} = \lambda(E)^{-1}.\lambda$ où λ désigne la mesure de Lebesgue alors $(E, \mathscr{B}_E, \mathbb{p})$ est un espace probabilisé.

Remarque 1.10 : Il s'agit de l'exemple classique d'un espace probabilisé infini non dénombrable.

<u>EXEMPLE 1.4 :</u> Considérons un carré rouge de côté 2 qui est à l'intérieur d'un carré blanc de côté 4 et qui a le même centre que le carré blanc. On peut s'intéresser à la probabilité qu'une fléchette lancée au hasard en direction du carré blanc touche le carré rouge. L'espace probabilisé à considérer dans cette expérience est $(E, \mathscr{B}_E, \mathbb{p})$ avec $E = [-2, 2] \times [-2, 2]$ et $\mathbb{p} = 1/16.\lambda$.

<u>DÉFINITION 1.8 :</u> Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ et f une application de A vers $\mathbb{R}$, on dit que f est **borélienne** si $\forall B \in \mathscr{B}, f^{-1}(B) \in \mathscr{B}_A$.

<u>PROPRIÉTÉ 1.5 :</u> Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ et f une application de A vers $\mathbb{R}$, si f est continue sur A sauf sur un ensemble dont la mesure de Lebesgue est nulle alors f est borélienne.

Remarque 1.11 : Un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ a une mesure de Lebesgue nulle donc une application continue par morceaux ou dont les points de discontinuité sont dénombrables est une application borélienne.

<u>EXERCICE 1.1 :</u> (Convergence commutative) Soit Σu une série à termes positifs et $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ bijective, on note $\Sigma u'$ la série de terme général $u' = u \circ \varphi$, démontrer que :

1. Si on note $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \max\{\varphi(k) | k \in [\![0, n]\!]\}$ alors on a $\lim p = +\infty$.
2. Si Σu converge alors $\Sigma u'$ converge et $\lim \Sigma u' \leq \lim \Sigma u$.
3. Les séries Σu et $\Sigma u'$ sont de même nature et en cas de convergence elles ont la même limite.

[Voir le détail]

<u>EXERCICE 1.2 :</u> Soit $(E, \mathcal{T}, \mathbb{p})$ un espace probabilisé (ou mesuré) et $(A, B) \in \mathcal{T}^2$, démontrer que :

1. $\mathbb{p}(A \setminus B) = \mathbb{p}(A) - \mathbb{p}(A \cap B)$.
2. $\mathbb{p}(A \cup B) = \mathbb{p}(A) + \mathbb{p}(B) - \mathbb{p}(A \cap B)$.
3. $A \subset B \implies \mathbb{p}(A) \leq \mathbb{p}(B)$.

[Voir le détail]

<u>EXERCICE 1.3 :</u> Soit $(E, \mathcal{T}, \mathbb{p})$ un espace probabilisé, démontrer que :

1. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements croissante au sens de l'inclusion alors $\mathbb{p}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mathbb{p}(A_0) + \sum_{k\geq 1} \mathbb{p}(A_k \setminus A_{k-1})$.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements croissante au sens de l'inclusion alors $\mathbb{p}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{p}(A_n) \in [0, 1]$.
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements décroissante au sens de l'inclusion alors $\mathbb{p}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{p}(A_n) \in [0, 1]$.

[Voir le détail]

<u>EXERCICE 1.4 :</u> (Génération des boréliens) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ non vide, démontrer que :

1. $\forall x \in U, \exists (r_x, n_x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x \in]r_x - \frac{1}{n_x}, r_x + \frac{1}{n_x}[$ et $]r_x - \frac{1}{n_x}, r_x + \frac{1}{n_x}[\subset U$.
2. U est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{I}$.
3. $\mathscr{B}$ est engendrée par $\mathcal{I}$.

[Voir le détail]

2 Indépendance

Dans cette partie on note $(E, \mathcal{T}, \mathbb{p})$ un espace probabilisé.

<u>DÉFINITION 2.1 :</u> Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'évènements, on dit que les évènements $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ sont **indépendants** si $\forall I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!]) \setminus \{\emptyset\}, \mathbb{p}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{p}(A_i)$.

Remarque 2.1 : Il ne faut pas confondre la notion d'évènements indépendants avec celle d'évènements deux à deux indépendants comme l'illustre l'exemple suivant.

<u>EXEMPLE 2.1 :</u> Pour modéliser l'expérience de deux lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée on considère E un ensemble de cardinal 4 et $\mathbb{p}$ la probabilité uniforme sur $(E, \mathscr{P}(E))$. On note A l'évènement "le premier lancer a donné Pile", B l'évènement "le deuxième lancer a donné Pile" et C l'évènement "les deux lancers ont donné le même résultat". Les évènements (A, B, C) ne sont pas indépendants mais indépendants deux à deux.

<u>DÉFINITION 2.2 :</u> Si B est un évènement de probabilité non nulle alors $\forall A \in \mathcal{T}$ on dit que le réel $\mathbb{p}(A\cap B)/\mathbb{p}(B)$ est la **probabilité de A sachant B** et on la note $\mathbb{p}_B(A)$.

<u>PROPRIÉTÉ 2.1 :</u> Si B est un évènement tel que $\mathbb{p}(B) \neq 0$ alors $\mathbb{p}_B$ est une probabilité sur $(E, \mathcal{T})$.

<u>PROPRIÉTÉ 2.2 :</u> Si (A, B) est un couple d'évènements tel que $\mathbb{p}(A) \neq 0$ et $\mathbb{p}(B) \neq 0$ alors (A et B indépendants $\iff \mathbb{p}_B(A) = \mathbb{p}(A) \iff \mathbb{p}_A(B) = \mathbb{p}(B)$).

<u>DÉFINITION 2.3 :</u> Soit $(\mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de tribus de E incluses dans $\mathcal{T}$, on dit que les tribus $(\mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ sont **indépendantes** si $\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n$ les évènements $(A_1, \ldots, A_n)$ sont indépendants.

<u>PROPRIÉTÉ 2.3 :</u> Si $(\mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille finie de tribus de E incluses dans $\mathcal{T}$ alors (les tribus $(\mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ sont indépendantes $\iff \forall I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!]) \setminus \{\emptyset\}$, les tribus $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ sont indépendantes).

Remarque 2.2 : Cette propriété montre que la définition des tribus indépendantes ne dépends pas de l'ordre de ces tribus et elle permet d'étendre cette définition à des familles quelconques de tribus.

<u>DÉFINITION 2.4 :</u> Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus de E incluses dans $\mathcal{T}$ indexée dans un ensemble $I \neq \emptyset$, on dit que les tribus $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ sont **indépendantes** si toute sous-famille finie de $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille de tribus indépendantes.

Exercice 2.1 : Soit $(E,\mathcal{T},\mathbb{p})$ un espace probabilisé et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$ avec $n\geq 2$, démontrer que :

1. (A_1 et A_2 indépendants) $\iff$ ($E\setminus A_1$ et A_2 indépendants).
2. $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ indépendants $\implies$ $(E\setminus A_1, A_2,\dots,A_n)$ indépendants.
3. $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ indépendants $\implies$ $(E\setminus A_k)_{1\leq k\leq n}$ indépendants.

[Voir le détail]

Exercice 2.2 : (Indicatrice d'Euler) Soit n un entier supérieur ou égal à 2 de décomposition en facteurs premiers notée $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. On considère l'expérience qui consiste à choisir un entier au hasard dans $[\![1,n]\!]$ et on pose $\phi(n)=|\{1\leq u\leq n | u\wedge n=1\}|$. On note A l'évènement "le nombre obtenu est premier avec n" et $\forall i\in[\![1,k]\!], A_i$ l'évènement "le nombre obtenu est divisible par p_i".

1. Définir un espace probabilisé $(E,\mathcal{T},\mathbb{p})$ modélisant l'expérience aléatoire.
2. Exprimer $\mathbb{p}(A)$ en fonction de $\phi(n)$ et n.
3. Montrer que $\forall i\in[\![1,k]\!], \mathbb{p}(A_i)=\frac{1}{p_i}$.
4. Montrer que les évènements $(A_i)_{1\leq i\leq k}$ sont indépendants.
5. Montrer que $\phi(n)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

[Voir le détail]

3 Variables aléatoires

Dans cette partie on note $(E,\mathcal{T},\mathbb{p})$ un espace probabilisé.

Définition 3.1 : On appelle **variable aléatoire** de E une application X de E vers $\mathbb{R}$ telle que $\forall A\in\mathscr{B}, X^{-1}(A)\in\mathcal{T}$. Dans le cas où $X(E)$ est dénombrable on dit qu'il s'agit d'une **variable aléatoire discrète**.

Remarque 3.1 : En particulier si $A\in\mathscr{B}$ on note $\{X\in A\}$ l'évènement $X^{-1}(A)\in\mathcal{T}$ et on peut ainsi par exemple considérer des évènements tels que $\{X<a\}$ ou $\{X=a\}$ avec $a\in\mathbb{R}$.

Remarque 3.2 : L'ensemble des variables aléatoires X de E est une $\mathbb{R}$ algèbre et si f est une application borélienne alors $f\circ X$ est une variable aléatoire de E.

Propriété 3.1 : Si X est une variable aléatoire de E alors $\left\{X^{-1}(B)|B\in\mathscr{B}\right\}$ est une tribu de E incluse dans $\mathcal{T}$.

Définition 3.2 : Si X est une variable aléatoire de E alors la tribu $\left\{X^{-1}(B)|B\in\mathscr{B}\right\}$ est appelée la **tribu de E engendrée par X** et elle est notée $\mathcal{T}_X$.

Définition 3.3 : Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires de E indexée dans un ensemble $I\neq\emptyset$, on dit que les variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$ sont **indépendantes** si les tribus $(\mathcal{T}_{X_i})_{i\in I}$ sont indépendantes.

Propriété 3.2 : Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille finie de variables aléatoires de E alors on a $\left((X_i)_{1\leq i\leq n}\right.$ indépendantes $\iff$ $\forall (B_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathscr{B}^n, \mathbb{p}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(B_i)\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{p}\left(X_i^{-1}(B_i)\right)$ $\iff$ $\forall (a_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{R}^n, \mathbb{p}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i<a_i\}\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{p}\left(\{X_i<a_i\}\right)$.

<u>Théorème 3.1 :</u> Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de variables aléatoires de E indépendantes et (I,J) une partition de $[\![1,n]\!]$, si f est une application borélienne de $\mathbb{R}^{|I|}$ vers $\mathbb{R}$ et g une application borélienne de $\mathbb{R}^{|J|}$ vers $\mathbb{R}$ alors $\omega \mapsto f((X_i(\omega))_{i\in I})$ et $\omega \mapsto g((X_i(\omega))_{i\in J})$ sont deux variables aléatoires indépendantes.

<u>Exemple 3.1 :</u> Si (X,Y,U,V) sont des variables aléatoires indépendantes alors $X+Y$ et UV sont deux variables aléatoires indépendantes.

<u>Définition 3.4 :</u> Soit X une variable aléatoire discrète, on dit que X admet une espérance si $\sum_{k\in X(E)} |k| \times \mathbb{p}\left(\{X=k\}\right) < +\infty$ et on note alors $\mathbb{E}(X)$ le réel $\sum_{k\in X(E)} k \times \mathbb{p}\left(\{X=k\}\right)$ appelé **espérance** de X ainsi que $L^1(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes qui admettent une espérance.

Remarque 3.3 : La définition a bien un sens car une série réelle (ou à valeurs dans un espace complet) absolument convergente est commutativement convergente.

Remarque 3.4 : On choisit dans ce cours de se restreindre aux variables aléatoires discrètes, la définition générale de l'espérance d'une variable aléatoire X est en fait l'intégrale de X sur l'espace mesuré $(E,\mathcal{T},\mathbb{p})$ que l'on note $\int_E X.d\mathbb{p}$.

<u>Propriété 3.3 :</u> $L^1(E,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et l'application $X\mapsto \mathbb{E}(X)$ de $L^1(E,\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ est linéaire et croissante.

<u>Théorème 3.2 :</u> Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille finie de variables aléatoires de $L^1(E,\mathbb{R})$ indépendantes alors $\prod_{i=1}^n X_i \in L^1(E,\mathbb{R})$ et $\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$.

<u>Définition 3.5 :</u> Soit X une variable aléatoire discrète, on dit que X admet une variance si X^2 admet une espérance et on note alors $\mathbb{v}(X)$ le réel positif $\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)$ appelé **variance** de X ainsi que $L^2(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes qui admettent une variance.

Remarque 3.5 : La définition a bien un sens car si X^2 admet une espérance alors X admet une espérance comme on peut le vérifier en utilisant l'inégalité $|k|\leq k^2+1$ vraie pour tout $k\in X(E)$ ainsi que le théorème de transfert présenté dans la suite.

<u>Propriété 3.4 :</u> Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille finie de variables aléatoires discrètes de $L^2(E,\mathbb{R})$ deux à deux indépendantes alors $\sum_{i=1}^n X_i \in L^2(E,\mathbb{R})$ et $\mathbb{v}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{v}(X_i)$.

<u>Exercice 3.1 :</u> Soit X une variable aléatoire discrète de E qui admet une variance. Démontrer que :

1. $\mathbb{v}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
2. $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, \mathbb{v}(a.X+b) = a^2\mathbb{v}(X)$.

[Voir le détail]

<u>Exercice 3.2 :</u> Soit X une variable aléatoire discrète de E qui admet une variance. Démontrer que :

1. $(X\geq 0$ et $\mathbb{E}(X)=0) \implies \mathbb{p}(\{X=0\})=1$.
2. $\exists a\in\mathbb{R}, \mathbb{p}\left(\{X=a\}\right)=1 \implies \mathbb{E}(X)=a$.
3. $\mathbb{v}(X)=0 \iff \exists a\in\mathbb{R}, \mathbb{p}\left(\{X=a\}\right)=1$.

[Voir le détail]

4 Loi de probabilité

Dans cette partie on note $(E, \mathcal{T}, \mathbb{p})$ un espace probabilisé.

<u>Propriété 4.1 :</u> Si X est une variable aléatoire de E alors l'application $B \mapsto \mathbb{p}(X^{-1}(B))$ de $\mathscr{B}$ vers $[0,1]$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$.

<u>Définition 4.1 :</u> Si X est une variable aléatoire de E alors la probabilité $B \mapsto \mathbb{p}(X^{-1}(B))$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ est notée $\mathbb{p}_X$ et appelée la **loi de probabilité** de X.

Remarque 4.1 : Si X est une variable aléatoire discrète il suffit dans ce cas de déterminer $\mathbb{p}_X(\{k\})$ pour tout $k \in X(E)$ pour déterminer entièrement la loi de probabilité $\mathbb{p}_X$ puisque pour $B \in \mathscr{B}$ on a $\mathbb{p}(X^{-1}(B)) = \sum_{k \in X(E) \cap B} \mathbb{p}_X(\{k\})$.

Remarque 4.2 : Lorsque l'on connait la loi de probabilité de X on peut alors calculer l'espérance de $\phi(X)$ où ϕ est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ borélienne en utilisant le théorème ci-dessous.

<u>Théorème 4.1 :</u> (Théorème de transfert) Si X est une variable aléatoire discrète de E et si $\phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est borélienne telle que $\sum_{k \in X(E)} |\phi(k)| \times \mathbb{p}_X(\{k\}) < +\infty$ alors $\phi \circ X \in L^1(E, \mathbb{R})$ et $\mathbb{E}(\phi \circ X) = \sum_{k \in X(E)} \phi(k) \times \mathbb{p}_X(\{k\})$.

Remarque 4.3 : Si $k \in \mathbb{R} \setminus X(E)$ alors $k \times \mathbb{p}_X(\{k\}) = 0$ donc l'espérance de X lorsqu'elle existe est la somme des éléments de $\{k \times \mathbb{p}_X(\{k\}) | k \in \mathbb{R}\}$. On déduit que deux variables aléatoires qui ont la même loi de probabilité ont aussi la même espérance et la même variance.

<u>Exemple 4.1 :</u> On considère l'expérience aléatoire de deux tirages successifs avec remise dans une urne contenant 3 boules rouges et 4 boules noires. On mise au départ 10 euros et on gagne 8 euros par boule rouge obtenue. On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(E, \mathscr{P}(E), \mathbb{p})$ où E est un ensemble de cardinal 7^2 et $\mathbb{p}$ la probabilité uniforme. On étudie X la variable aléatoire qui donne le gain final de l'expérience et on a $X(E) = \{-10, -2, 6\}$. Pour déterminer la loi de probabilité de X il faut calculer $\mathbb{p}_X(\{-10\}) = \frac{16}{49}$ et $\mathbb{p}_X(\{-2\}) = \frac{24}{49}$ ainsi que $\mathbb{p}_X(\{6\}) = \frac{9}{49}$. Si on souhaite calculer l'espérance de X^2 on peut utiliser le théorème de transfert et on obtient $\mathbb{E}(X^2) = 100 \times \frac{16}{49} + 4 \times \frac{24}{49} + 36 \times \frac{9}{49} = \frac{2020}{49}$.

<u>Définition 4.2 :</u> Si X est une variable aléatoire de E alors l'application $a \mapsto \mathbb{p}_X(]-\infty, a])$ de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ est appelée la **fonction de répartition** de X et elle est notée $\mathcal{F}_X$.

<u>Propriété 4.2 :</u> Si X est une variable aléatoire de E alors $\mathcal{F}_X$ est croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{-\infty} \mathcal{F}_X = 0$ et $\lim_{+\infty} \mathcal{F}_X = 1$.

<u>Propriété 4.3 :</u> Si X et Y sont deux variables aléatoires de E alors $(\mathcal{F}_X = \mathcal{F}_Y \iff \mathbb{p}_X = \mathbb{p}_Y)$.

Remarque 4.4 : La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine ainsi la loi de probabilité de X. En pratique pour des variables aléatoires non discrètes il est parfois plus facile de calculer la fonction de répartition que de chercher à obtenir la loi de probabilité directement.

<u>Définition 4.3 :</u> On dit qu'une variable aléatoire X de E suit une **loi uniforme discrète** de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ si on a $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbb{p}_X(\{k\}) = \frac{1}{n}$.

<u>Propriété 4.4 :</u> Si une variable aléatoire X de E suit une loi uniforme discrète alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{v}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

<u>Définition 4.4 :</u> On dit qu'une variable aléatoire X de E suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0,1]$ si on a $\mathbb{p}_X(\{1\}) = p$ et $\mathbb{p}_X(\{0\}) = 1 - p$.

Remarque 4.5 : Attention l'existence d'une variable aléatoire de E qui suit une loi de Bernoulli n'implique par que le cardinal de E est 2 car on peut seulement remarquer que $2 = |X(E)| \leq |E|$. En fait si on note $A = X^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{T}$ et χ_A la fonction indicatrice de A alors on a $\mathbb{p}(\{X = \chi_A\}) = 1$.

<u>PROPRIÉTÉ 4.5 :</u> Si une variable aléatoire X de E suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{v}(X) = p(1-p)$.

<u>DÉFINITION 4.5 :</u> On dit qu'une variable aléatoire X de E suit une **loi binomiale** de paramètre $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$ si on a $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{p}_X(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Remarque 4.6 : L'intérêt de la loi binomiale se présente lorsque l'on répète de manière indépendante une expérience aléatoire à deux issues (succès et échec) et que l'on s'intéresse à la probabilité d'obtenir un certain nombre de succès comme on peut le voir formalisé dans la propriété ci-dessous.

<u>PROPRIÉTÉ 4.6 :</u> Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de n variables aléatoires indépendantes de E suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ et si on note $\forall \omega \in E, X(\omega) = |\{k \in [\![1,n]\!] | X_k(\omega) = 1\}|$ alors X est une variable aléatoire de E qui suit une loi binomiale de paramètre (n,p).

Remarque 4.7 : On peut remarquer alors que $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

<u>PROPRIÉTÉ 4.7 :</u> Si une variable aléatoire X de E suit une loi binomiale de paramètre $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$ alors $\mathbb{E}(X) = n.p$ et $\mathbb{v}(X) = n.p(1-p)$.

<u>DÉFINITION 4.6 :</u> On dit qu'une variable aléatoire X de E suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ si on a $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{p}_X(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

<u>PROPRIÉTÉ 4.8 :</u> Si une variable aléatoire X de E suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{v}(X) = \lambda$.

<u>DÉFINITION 4.7 :</u> On dit qu'une variable aléatoire X de E suit une **loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$ si on a $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{p}_X(\{k\}) = p(1-p)^{k-1}$.

Remarque 4.8 : L'intérêt de la loi géométrique se présente lorsque l'on répète de manière indépendante une expérience aléatoire à deux issues (succès et échec) et que l'on s'intéresse à la probabilité d'obtenir le premier succès au bout d'un certain nombre de répétitions comme on peut le voir formalisé dans la propriété ci-dessous.

<u>PROPRIÉTÉ 4.9 :</u> Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de n variables aléatoires indépendantes de E suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ et si on note $\forall \omega \in E, X(\omega) = \min\{k \in [\![1,n]\!] | X_k(\omega) = 1\}$ en convenant que $\min(\emptyset) = 0$ alors X est une variable aléatoire de E qui suit une loi géométrique de paramètre p.

<u>PROPRIÉTÉ 4.10 :</u> Si une variable aléatoire X de E suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{v}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

EXERCICE 4.1 : (Loi de Pascal) Une urne contient des boules indiscernables au toucher : des blanches en proportion p et des noires en proportion $q = 1 - p$. On appelle succès le fait d'extraire une boule blanche de l'urne. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à recommencer sans jamais s'arrêter le tirage d'une boule avec remise. On admet qu'il existe $(E, \mathcal{T}, \mathbb{p})$ un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire et pour $r \in \mathbb{N}^*$ fixé on note X_r la variable aléatoire de E égale au rang du $r^{\text{ième}}$ succès. On cherche à étudier si X_r admet une espérance et à la calculer si c'est le cas.

1. On suppose dans cette question que l'on a extrait avec remise n boules de l'urne où $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Définir un espace probabilisé $(E', \mathcal{T}', \mathbb{p}')$ modélisant l'expérience aléatoire de la question.
   (b) On considère A l'évènement "on a obtenu $r-1$ succès lors des $n-1$ premiers tirages. Calculer la probabilité de A.
   (c) Soit X'_r la variable aléatoire de E' égale au rang du $r^{\text{ième}}$ succès. Déterminer la loi de X'_r.
2. On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$. Vérifier que la série de terme général $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa somme.
3. Calculer l'espérance de X_r en justifiant son existence.

[Voir le détail]

Remarque 4.9 : Si on choisit $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ alors E est en bijection avec $\mathbb{R}$ et il n'est pas évident de faire de E un espace probabilisé. Une méthode plus simple est de choisir $E = [0,1]$ puis $\mathcal{T} = \mathscr{B}_E$ et $\mathbb{p}$ la mesure de Lebesgue. En considérant le développement en base 2 d'un réel on constate que l'application f qui à une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\{0,1\}$ associe le réel $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n}$ dans $[0,1]$ est surjective. Si on note $D = \left\{ \frac{a}{2^k} \middle| (a,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des fractions dyadiques alors on remarque que l'application f n'est pas injective car les éléments de $D' = D \cap]0,1[$ ont deux antécédents (une suite stationnaire à 1 ou une suite stationnaire à 0). On peut définir l'application g qui a une suite u d'éléments de $\{0,1\}$ associe $f(u)$ si $f(u) \notin D'$ ou associe $\frac{f(u)}{2}$ si ($f(u) \in D'$ et u stationnaire à 1) ou associe $\frac{1+f(u)}{2}$ si ($f(u) \in D'$ et u stationnaire à 0). On peut alors vérifier que g est une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ vers $[0,1]$ ce qui justifie notre choix d'espace probabilisé.

[Voir le détail]

5 Théorèmes de convergence

DÉFINITION 5.1 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de E et X une variable aléatoire de E, on dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X si $\forall a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{F}_X$ continue en a on a :

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{F}_{X_n}(a) = \mathcal{F}_X(a)$$

Remarque 5.1 : La fonction de répartition d'une variable aléatoire détermine complètement la loi de probabilité de cette variable donc ce type de convergence ne dépends que des lois de probabilité des variables aléatoires mises en jeu.

EXEMPLE 5.1 : Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de E telle que $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n$ suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable de E qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

DÉFINITION 5.2 : Une application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite à **support compact** s'il existe K un compact de $\mathbb{R}$ tel que f est nulle sur $\mathbb{R} \setminus K$. On note $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ à support compact.

PROPRIÉTÉ 5.1 : Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de E et X une variable aléatoire de E alors $\big((X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $X \iff \forall f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}), \mathbb{E}(f \circ X_n) = \mathbb{E}(f \circ X)\big)$.

Définition 5.3 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de E et X une variable aléatoire de E, on dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en probabilité** vers X si $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{p}\left(\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}\right)=0$$

Propriété 5.2 : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de E qui converge en probabilité vers une variable aléatoire X de E alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

Définition 5.4 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de E et X une variable aléatoire de E, on dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge presque surement** vers X si on a :

$$\mathbb{p}\left(\left\{\omega\in E\,\middle|\,\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\right\}\right)=1$$

Remarque 5.2 : La définition a un sens car si si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de E et si $a\in\overline{\mathbb{R}}$ alors $\{\omega\in E|\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=a\}\in\mathcal{T}$.

Propriété 5.3 : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de E qui converge presque surement vers une variable aléatoire X de E alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X.

Propriété 5.4 : (Bienaymé-Tchebychev) $\forall X\in L^2(E,\mathbb{R}),\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\mathbb{p}(\{|X-\mathbb{E}(X)|\geq\varepsilon\})\leq\frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

[Voir le détail]

Définition 5.5 : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de E alors $\forall n\in\mathbb{N}$ la variable aléatoire $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}X_k$ est notée $\widehat{X}_n$ et on dit que $(\widehat{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **la moyenne de Cesàro** de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 5.5 : (Loi faible des grands nombres) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de $L^2(E,\mathbb{R})$ deux à deux indépendantes qui ont la même espérance et la même variance alors $(\widehat{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_0)$.

[Voir le détail]

Remarque 5.3 : La loi faible des grands nombres est assez facile à démontrer mais le théorème ci-dessous qui est beaucoup plus fort est bien plus difficile à prouver.

Théorème 5.1 : (Loi forte des grands nombres) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de $L^1(E,\mathbb{R})$ indépendantes qui ont la même loi de probabilité alors $(\widehat{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque surement vers $\mathbb{E}(X_0)$.

Remarque 5.4 : La loi forte des grands nombres justifie l'intérêt des probabilités : lorsque l'on reproduit une expérience de manière indépendante la fréquence de réalisation d'un évènement se rapproche de sa probabilité. Le théorème décrit le type de convergence en question.

Exercice 5.1 : Soit $p\in[0,1]$ et f une application continue de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Déterminer sous réserve d'existence la limite : $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

[Voir le détail]

Preuves et solutions.

Solution - Exercice 1.1 : [Voir l'énoncé]

1. On remarque que p est croissante, si p est majorée alors φ serait majorée puis $\varphi(\mathbb{N})$ serait une partie finie de $\mathbb{N}$ ce qui ce qui est absurde car φ est bijective, ainsi p est croissante et non majorée donc $\lim p = +\infty$.
2. La somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $\Sigma u'$ est $\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=0}^{p_n} u_k$ et on reconnait dans l'inégalité à droite la somme partielle d'ordre p_n de Σu, on peut conclure en utilisant une composition de limites et la question précédente.
3. En appliquant la question précédente à la série $\Sigma u \circ \varphi$ avec la bijection φ^{-1} on obtient ($\Sigma u'$ converge $\implies$ Σu converge et $\lim \Sigma u \leq \lim \Sigma u'$) d'où le résultat.

Solution - Exercice 1.2 : [Voir l'énoncé]

1. On utilise $(A \setminus B, A \cap B)$ comme partition de A.
2. On utilise $(A \setminus B, B \setminus A, A \cap B)$ comme partition de $A \cup B$ puis la question précédente.
3. On utilise $(A, B \setminus A)$ comme partition de B.

Solution - Exercice 1.3 : [Voir l'énoncé]

1. On remarque que A_0 et $(A_k \setminus A_{k-1})_{k \in \mathbb{N}^*}$ forment une partition de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
2. On a $\mathbb{p}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mathbb{p}(A_0) + \sum_{k\geq 1} \mathbb{p}(A_k) - \mathbb{p}(A_{k-1}) = \mathbb{p}(A_0) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{p}(A_n) - \mathbb{p}(A_0) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{p}(A_n) \in [0,1]$.
3. Il suffit d'appliquer la question précédente à la suite $(E \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution - Exercice 1.4 : [Voir l'énoncé]

1. Comme U est ouvert on peut noter $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$ puis $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ de plus par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ on peut noter $r_x \in \mathbb{Q} \cap]x - \frac{1}{n_x}, x + \frac{1}{n_x}[$ ce qui nous donne $x \in]r_x - \frac{1}{n_x}, r_x + \frac{1}{n_x}[$ et par inégalité triangulaire on a aussi $]r_x - \frac{1}{n_x}, r_x + \frac{1}{n_x}[\subset U$.
2. Si on note $\forall x \in U, I_x =]r_x - \frac{1}{n_x}, r_x + \frac{1}{n_x}[$ en utilisant les notations précédentes alors on a montré que $U \subset \bigcup_{x\in U} I_x \subset U$ de plus si on note φ l'application $x \mapsto (r_x, n_x)$ de U vers $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}^*$ alors $\varphi(U)$ est dénombrable et on déduit que $U = \bigcup_{(r,n)\in\varphi(U)}]r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}[$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{I}$.
3. Considérons la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathcal{I}$ notée $\mathcal{T}'$, comme les éléments de $\mathcal{I}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$ on déduit que $\mathscr{B}$ est une tribu de $\mathbb{R}$ contenant $\mathcal{I}$ puis que $\mathcal{T}' \subset \mathscr{B}$, de plus d'après la question précédente tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un élément de $\mathcal{T}'$ donc $\mathscr{B} \subset \mathcal{T}'$.

Solution - Exercice 2.1 : [Voir l'énoncé]

1. On remarque que (A_1 et A_2 indépendants) $\iff$ $(\mathbb{p}(A_2) - \mathbb{p}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{p}(A_2) - \mathbb{p}(A_1).\mathbb{p}(A_2))$ $\iff$ $(\mathbb{p}(A_2 \setminus A_1) = (1 - \mathbb{p}(A_1)).\mathbb{p}(A_2))$ $\iff$ ($E \setminus A_1$ et A_2 indépendants) en utilisant l'exercice 1.2.
2. Si J est une partie de $[\![2, n]\!]$ alors comme A_1 et $\bigcap_{k\in J} A_k$ sont indépendants on déduit avec la question précédente que $\mathbb{p}\left(E \setminus A_1 \cap \bigcap_{k\in J} A_k\right) = \mathbb{p}(E \setminus A_1).\prod_{k\in J} \mathbb{p}(A_k)$, comme toute sous-famille de $(E \setminus A_1, A_2, \ldots, A_n)$ s'écrit $(E \setminus A_1, (A_k)_{k\in J})$ ou $(A_k)_{k\in J}$ avec $J \subset [\![2, n]\!]$ on déduit en utilisant l'égalité précédente que $(E \setminus A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est une famille d'évènements indépendants.
3. Comme l'indépendance d'une famille d'évènements ne dépends pas de l'ordre d'indexation de la famille il suffit de faire une récurrence sur n en utilisant le résultat de la question précédente.

Solution Exercice 2.2 : [Voir l'énoncé]

1. On peut prendre $E = [\![1, n]\!]$ et $\mathcal{T} = \mathscr{P}(E)$ ainsi que $\mathbb{p}$ la probabilité uniforme.

2. $\mathbb{p}(A) = \frac{\phi(n)}{n}$.
3. $A_i = \{u \in [\![1,n]\!] \mid p_i \text{ divise } u\} = \{p_i.u \mid 1 \leq p_i.u \leq n \text{ et } u \in \mathbb{N}\} = \{p_i.u \mid 1 \leq u \leq \frac{n}{p_i} \text{ et } u \in \mathbb{N}\}$ donc $|A_i| = \frac{n}{p_i}$ ce qui permet de conclure.
4. $\forall J \in \mathscr{P}([\![1,k]\!]), \bigcap_{i\in J} A_i = \{u \in [\![1,n]\!] \mid \forall i \in J, p_i \text{ divise } u\} = \{u \in [\![1,n]\!] \mid \prod_{i\in J} p_i \text{ divise } u\}$ en utilisant un corollaire du théorème de Gauss et le théorème de décomposition en facteurs premiers puis en reprenant le raisonnement de la question précédente on obtient $|\bigcap_{i\in J} A_i| = n/\prod_{i\in J} p_i$ d'où le résultat.
5. On a $A = \bigcap_{i=1}^{k} E \setminus A_i$ et on sait d'après l'exercice 2.1 que les évènements $(E \setminus A_i)_{1\leq i\leq k}$ sont indépendants ce qui permet de conclure.

Solution - Exercice 3.1 : [Voir l'énoncé]

1. $\mathbb{v}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2.X.\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2.\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ en utilisant la linéarité de l'espérance.
2. D'après la question précédente $\mathbb{v}(a.X+b) = \mathbb{E}(a^2.X^2+b^2+2ab.X) - (a.\mathbb{E}(X)+b)^2 = a^2.\mathbb{E}(X^2) + b^2 + 2ab.\mathbb{E}(X) - a^2.\mathbb{E}(X)^2 - b^2 - 2ab.\mathbb{E}(X) = a^2.\mathbb{v}(X)$.

Solution - Exercice 3.2 : [Voir l'énoncé]

1. $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(E)} k.\mathbb{p}(\{X = k\}) = 0$ est la somme d'une série à termes positifs donc on a $\forall k \in X(E) \setminus \{0\}, \mathbb{p}(\{X = k\}) = 0$ en utilisant le théorème de la limite monotone puis il vient $\mathbb{p}(X \in X(E) \setminus \{0\}) = 0$ ce qui permet de conclure.
2. On a $\forall k \in X(E) \setminus \{a\}, \{X = k\} \subset \{X \neq a\}$ puis $\mathbb{p}(\{X = k\}) \leq \mathbb{p}(\{X \neq a\}) = 0$ d'après l'exercice 1.2 donc $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(E)} k.\mathbb{p}(\{X = k\}) = a.\mathbb{p}(\{X = a\}) = a$.
3. $(\Leftarrow)$ On sait d'après la question précédente que $\mathbb{E}(X) = a$ de plus $\{X = a\} \subset \{X^2 = a^2\}$ donc $\mathbb{p}(\{X^2 = a^2\}) = 1$ puis $\mathbb{E}(X^2) = a^2$ en utilisant à nouveau la question précédente, on obtient alors $\mathbb{v}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = a^2 - a^2 = 0$ d'après l'exercice 3.1.

   $(\Rightarrow)$ Si on note $a = \mathbb{E}(X)$ alors la variable aléatoire $(X - a)^2$ est positive et d'espérance nulle donc on a $\mathbb{p}(\{(X - a)^2 = 0\}) = 1$ d'après la première question, il reste à remarquer que $\{(X - a)^2 = 0\} = \{X = a\}$ pour conclure.

Solution - Exercice 4.1 : [Voir l'énoncé]

1. (a) On peut prendre $E' = X^n$ où X est un ensemble de cardinal 2 puis $\mathcal{T}' = \mathscr{P}(E')$ et $\mathbb{p}'$ la probabilité uniforme.
   (b) $\mathbb{p}'(A) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{n-r}$.
   (c) Si on note S l'évènement "on a obtenu un succès au $n^{\text{ième}}$ tirage alors A et S sont indépendants et on a $\mathbb{p}'(\{X'_r = n\}) = \mathbb{p}'(A \cap S) = \mathbb{p}'(A).\mathbb{p}'(S) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$.
2. On note f la somme de la série entière Σx^n sur son disque ouvert de convergence $D =]-1,1[$, on a $\forall x \in D, f(x) = \frac{1}{1-x}$ et on sait que f est de classe C^∞ sur D avec :

$$\forall x \in D, f^{(r)}(x) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{n\geq r} \frac{n!}{(n-r)!} x^{n-r} = \sum_{n\geq r+1} \frac{(n-1)!}{(n-(r+1))!} x^{n-(r+1)}$$

   On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = p^r \binom{n-1}{r-1} q^{n-r} = \frac{p^r}{(r-1)!} \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} q^{n-r}$ donc la série de terme général $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa somme vaut $\frac{p^r}{(r-1)!} \times \sum_{n\geq r} \frac{(n-1)!}{(n-r)!} q^{n-r} = \frac{p^r}{(r-1)!} \times f^{(r-1)}(q) = \frac{p^r}{(1-q)^r} = 1$.
3. $X_r(E) = \mathbb{N}^*$ et $\sum_{n\in X_r(E)} |n| \times \mathbb{p}(\{X_r = n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n.p_n = \frac{p^r}{(r-1)!} \times \sum_{n\geq r} \frac{n!}{(n-r)!} q^{n-r} < +\infty$ donc X_r admet une espérance et $\mathbb{E}(X_r) = \frac{p^r}{(r-1)!} \times f^{(r)}(q) = \frac{r.p^r}{(1-q)^{r+1}} = \frac{r}{p}$.

Preuve - Remarque 4.9 : [Voir l'énoncé] • Démontrons que g est surjective, il est clair que g est à valeurs dans $[0,1]$ et on considère $\alpha \in [0,1]$, si $\alpha \notin D'$ alors il existe x un antécédent de α par f et on remarque que $g(x)=f(x)=\alpha$, si on suppose que $\alpha\in D'\cap[0,1/2]$ alors on a $\beta=2\alpha\in[0,1]$ et il existe y un antécédent de β par f stationnaire à 1 puis $g(y)=\frac{f(y)}{2}=\frac{\beta}{2}=\alpha$, si on suppose que $\alpha\in D'\cap[1/2,1]$ alors on a $\gamma=2\alpha-1\in[0,1]$ et il existe z un antécédent de γ par f stationnaire à 0 de sorte que $g(z)=\frac{1+f(z)}{2}=\frac{1+\gamma}{2}=\alpha$.

• Démontrons que g est injective, soit $(u,v)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tels que $g(u)=g(v)$, si on suppose que $f(u)\notin D'$ alors $g(u)=f(u)=g(v)$ n'est pas dans D', ainsi u et v sont deux développements dyadiques de $g(u)=g(v)\notin D'$ et par unicité de ce développement on a $u=v$, si on suppose que $(f(u)\in D'$ et u stationnaire à 1) alors $g(v)=\frac{f(u)}{2}\in D'$, si v est stationnaire à 1 alors comme u et v sont deux développements dyadiques stationnaires à 1 de $g(u)=g(v)\in D'$ on conclut que $u=v$, la suite v ne peut pas être stationnaire à 0 car l'égalité $g(v)=g(u)$ donne :

$$\frac{1}{2}+\sum_{n\geq 2}\frac{v_{n-1}}{2^n}=\sum_{n\geq 2}\frac{u_{n-1}}{2^n}\iff\sum_{n\geq 2}\frac{1+v_{n-1}}{2^n}=\sum_{n\geq 2}\frac{u_{n-1}}{2^n}\iff\sum_{n\geq 2}\frac{1+v_{n-1}-u_{n-1}}{2^n}=0$$

On reconnait une série à termes positifs et on peut conclure que $\forall n\geq 2, 1+v_{n-1}-u_{n-1}=0$ puis que u est la suite constante de valeur 1 et v est la suite constante de valeur 0, ainsi on a $g(u)=g(v)=\frac{1}{2}$ ce qui implique $f(u)=1\in D'$ et c'est absurde, si on suppose que $(f(u)\in D'$ et u stationnaire à 0) alors on montre comme précédemment que le fait que la suite v soit stationnaire à 1 entraine $g(u)=g(v)=\frac{1}{2}$ puis l'absurdité $f(u)=0\in D'$, ainsi la suite v est stationnaire à 0 et comme u et v sont deux développements dyadiques stationnaires à 0 de $g(u)=g(v)\in D'$ on obtient encore $u=v$.

<u>Preuve - Propriété 5.4 :</u> [Voir l'énoncé] Utilisons le théorème de transfert puis le théorème de la limite monotone :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|^2) &= \sum_{k\in X(E)}|k|^2.\mathbb{p}_X(\{k\})\\
&\geq \sum_{k\in X(E)\backslash]-\varepsilon,\varepsilon[}|k|^2.\mathbb{p}_X(\{k\})\\
&\geq \sum_{k\in X(E)\backslash]-\varepsilon,\varepsilon[}\varepsilon^2.\mathbb{p}_X(\{k\})\\
&= \varepsilon^2.\mathbb{p}\left(\{X\in\mathbb{R}\backslash]-\varepsilon,\varepsilon[\}\right)\\
&= \varepsilon^2.\mathbb{p}\left(\{|X|\geq\varepsilon\}\right)
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité $\mathbb{E}(|X|^2)\geq\varepsilon^2.\mathbb{p}\left(\{|X|\geq\varepsilon\}\right)$ à la variable aléatoire $X-\mathbb{E}(X)$.

<u>Preuve - Propriété 5.5 :</u> [Voir l'énoncé] On remarque que $\forall n\in\mathbb{N},\mathbb{E}(\widehat{X}_n)=\mathbb{E}(X_0)$ d'après la propriété 3.3 et aussi que $\mathbb{v}(\widehat{X}_n)=\frac{1}{n+1}\mathbb{v}(X_0)$ d'après la propriété 3.4 et l'exercice 3.1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on déduit que $\mathbb{p}\left(\left\{\left|\widehat{X}_n-\mathbb{E}(X_0)\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\leq\frac{\mathbb{v}(X_0)}{(n+1)\varepsilon^2}$ d'où le résultat.

<u>Solution - Exercice 5.1 :</u> [Voir l'énoncé] On a $\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)=\mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right)$ où $(X_1,\ldots,X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p d'après le théorème de transfert, de plus $\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers p d'après la loi forte (ou faible) des grands nombres, on déduit que $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right)=\mathbb{E}(f(p))=f(p)$ d'après la propriété 5.1.