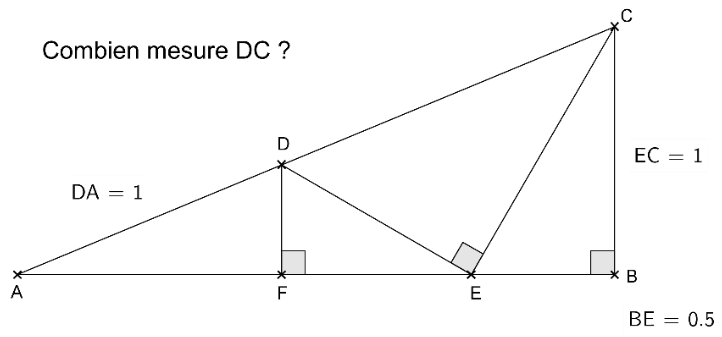
RACINE CUBIQUE DE 2

Les points (A,D, C) sont alignés et les points (A,F,E,B) sont alignés.



<u>*Questions intermédiaires :*</u>

1) Montrer que $\widehat{FED} = \widehat{BCE}$.
2) Montrer que $DE = 2 \times DF$.
3) Dans la suite on note $DC = x$ et $DF = y$.
   a) Montrer que $x^2 = 4y^2 + 1$.
   b) Montrer que $y = \sqrt{0{,}75} \div (1 + x)$.
4) Montrer que $x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$.
5) Développer $(x + 2)(x^3 - 2)$ et en déduire la valeur de x.

<u>*Solution :*</u>

1) Comme F, E et D sont alignés on a $\widehat{FED} + \widehat{CEB} = 180 - \widehat{DEC} = 90$ et comme la somme des angles des triangles vaut 180° on a aussi $\widehat{CEB} + \widehat{BCE} = 180 - \widehat{EBC} = 90$, on déduit que $\widehat{FED} + \widehat{CEB} = \widehat{CEB} + \widehat{BCE}$ puis que $\widehat{FED} = \widehat{BCE}$.
2) D'après la question 1) il est possible de déplacer dans le plan le triangle BCE de manière à ce que les triangles FED et BCE forment une configuration de Thalès, on obtient alors $\frac{DE}{DF} = \frac{EC}{BE} = \frac{1}{0.5} = 2$ puis $DE = 2 \times DF$.
3) a) Le triangle DEC est rectangle en E, le théorème de Pythagore donne $DE^2 + EC^2 = DC^2$ donc $(2y)^2 + 1^2 = x^2$ puis $x^2 = 4y^2 + 1$ en utilisant la question 2).
   b) Le triangle EBC est rectangle en B et le théorème de Pythagore donne $BC = \sqrt{1^2 - (0.5)^2} = \sqrt{0{,}75}$, d'autre part les triangles ABC et AFD forment une configuration de Thalès et on a donc $\frac{DF}{AD} = \frac{BC}{AC}$ puis $\frac{y}{1} = \frac{BC}{1+x}$ et finalement $y = \sqrt{0{,}75} \div (1 + x)$.
4) En utilisant la question 3) on a $x^2 = 4\left(\frac{\sqrt{0{,}75}}{1+x}\right)^2 + 1 = \frac{4\times 0.75}{(1+x)^2} + 1 = \frac{3}{(1+x)^2} + 1$ et en multipliant cette égalité par $(1 + x)^2$ on obtient $x^2(1 + x)^2 = 3 + (1 + x)^2$ donc $x^2(1 + x^2 + 2x) = 3 + (1 + x^2 + 2x)$ puis $x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$.
5) En développant on a $(x + 2)(x^3 - 2) = x^4 + 2x^3 - 2x - 4$ et d'après la question 4) on déduit que x est la solution positive de l'équation $(x + 2)(x^3 - 2) = 0$ c'est-à-dire que l'on a $x^3 = 2$ *(on dit que x est la racine cubique de 2).*