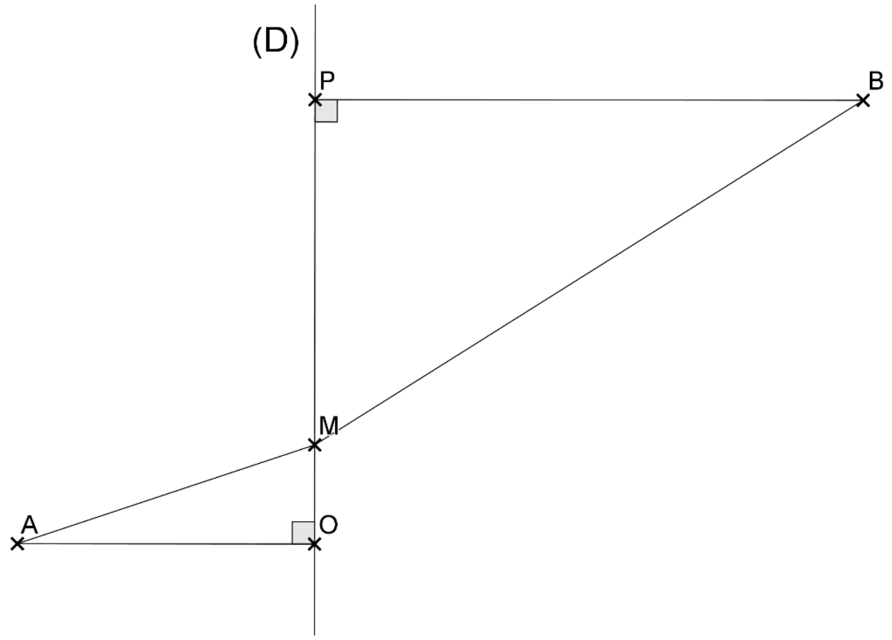
LE TRAJET LE PLUS RAPIDE



Considérons une droite (D) et deux points A et B qui ne sont pas du même côté de la droite (D). La droite (D) partage le plan en deux demi-plans : on suppose que dans le demi-plan où se trouve A on ne peut se déplacer qu'à la vitesse V_A et que dans le demi-plan où se trouve B on ne peut se déplacer qu'à la vitesse V_B :

- On note O le projeté orthogonal de A sur (D) et $OA = a$.
- On note P le projeté orthogonal de B sur (D) et $BP = b$.
- On note $OP = d$.

Pour aller de A vers B il existe un unique trajet qui est le plus rapide possible, ce trajet est constitué du chemin $[AM]$ suivi du chemin $[MB]$ où M est un point de $[OP]$, pour déterminer ce trajet il suffit de connaître $OM = x$. La valeur de x est donnée par les formules suivantes :

$$\alpha = \frac{a^2}{(V_B/V_A)^2 - 1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b^2}{1 - (V_A/V_B)^2} \quad \text{et} \quad u = \frac{d^2\alpha\beta}{4} \quad \text{et} \quad v = \frac{d^2 + \beta - \alpha}{3} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{V_A - V_B}{|V_A - V_B|}$$

$$y = \left(u + \frac{v^3}{8} + \sqrt{u\left(u + \frac{v^3}{4}\right)}\right)^{1/3} + \left(u + \frac{v^3}{8} - \sqrt{u\left(u + \frac{v^3}{4}\right)}\right)^{1/3}$$

$$x = \frac{d}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2y - 2v + d^2} - \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2d^2 - 2y - 4v - \frac{2\varepsilon d(\alpha + \beta)}{\sqrt{d^2 + 2y - 2v}}}$$

Tearii CRIDLAND

Le problème est de déterminer un extremum de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{AM}{V_A} + \frac{MB}{V_B} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{V_A} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{V_B}$$

Le calcul de la dérivée donne :

$$f'(x) = \frac{x}{V_A\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{V_B\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

L'équation $f'(x) = 0$ peut donc s'écrire simplement :

$$\frac{\sin(\widehat{OAM})}{V_A} = \frac{\sin(\widehat{PBM})}{V_B}$$

La forme de l'équation précédente ne permet pas de déterminer x ainsi on pose :

$$r = \frac{V_A}{V_B}$$

On obtient cette fois l'équation :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{b^2 + (d-x)^2} - r(d-x)\sqrt{a^2 + x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2(b^2 + (d-x)^2) = r^2(d-x)^2(a^2 + x^2)$$

Il s'agit donc de déterminer une solution de l'équation de degré 4 :

$$(1 - r^2)x^4 - 2d(1 - r^2)x^3 + (d^2(1 - r^2) + b^2 - r^2a^2)x^2 + 2dr^2a^2x - d^2r^2a^2 = 0$$

Si on pose $z = x - \frac{d}{2}$ alors l'équation précédente devient :

$$z^4 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

Avec :

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{b^2 - a^2r^2}{1 - r^2} - \frac{d^2}{2}, \frac{d(a^2r^2 + b^2)}{1 - r^2}, \frac{d^4}{16} + \frac{d^2(b^2 - a^2r^2)}{4(1 - r^2)}\right)$$

Les solutions de cette dernière équation sont de la forme :

$$z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2y - \alpha} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2y - \alpha \pm \frac{2\beta}{\sqrt{2y - \alpha}}}$$

Avec les signes en rouge qui sont opposés et y qui est la solution de l'équation de degré 3 :

$$8y^3 - 4\alpha y^2 - 8\gamma y + 4\alpha\gamma - \beta^2 = 0$$

Si on pose $p = -\gamma - \frac{\alpha^2}{12}$ et $q = \frac{-\alpha^3}{108} + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{8} - \frac{\alpha\gamma}{6}$ alors on a $y = \varepsilon + \frac{\alpha}{6}$ avec :

$$\varepsilon^3 + p\varepsilon + q = 0$$

On obtient :

$$\varepsilon = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

En remontant tous les calculs on aboutit à la solution donnée (vérifiée dans une simulation informatique).