

LES CALCULS D'UN EMPRUNT

Les banques présentent au public un taux d'intérêt annuel noté t' mais elles fonctionnent en réalité avec un taux d'intérêt mensuel noté t qui est égal à $t' \div 12$.

Ce taux d'intérêt t représente la proportion d'argent que l'on gagne lorsque l'on prête une somme d'argent pendant un mois. Cela veut dire que si l'on prête une somme d'argent x pendant un mois on obtiendra alors une somme d'argent qui est $x' = x + tx = (1 + t)x$. Plus généralement si l'on prête une somme d'argent x pendant n mois on obtiendra alors une somme d'argent qui est $x' = (1 + t)^n x$.

Une autre façon d'interpréter cette situation est de dire que si une personne doit nous rembourser une somme d'argent x' dans n mois c'est que cette personne emprunte une somme d'argent qui est $x = x' \div (1 + t)^n$.

On considère à présent une personne X qui emprunte à une banque une somme S sur p années au taux d'intérêt annuel t' et on note m la mensualité que doit rembourser X .

Au bout de n mois X doit rembourser sa mensualité m ce qui signifie que X emprunte à la banque la somme :

$$s_n = \frac{m}{(1 + t)^n}$$

Comme le raisonnement précédent est valable pour chaque mois au cours de l'emprunt de X la somme totale que X emprunte à la banque est :

$$S = \sum_{k=1}^{12p} s_k$$

Il s'agit d'une série géométrique et on déduit la formule qui permet de calculer la mensualité :

$$m = \frac{St}{1 - \frac{1}{(1 + t)^{12p}}}$$

Au bout de n mois on considère C_n la somme que X doit à la banque et I_n les intérêts que X doit à la banque, par définition du taux d'intérêt mensuel on a :

$$\begin{cases} I_n = tC_{n-1} \\ C_n = C_{n-1} - m + I_n \end{cases}$$

On en déduit la formule qui permet de calculer C_n que l'on appelle encore le capital restant dû au bout de n mois :

$$C_n = (1 + t)^n \left(S - \frac{m}{t} \right) + \frac{m}{t}$$