LES DECIMALES EXACTES

Propriété 1 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, si $0 \leq x - y \leq \frac{1}{10^{n+1}}$ et si la $n+1$ ème décimale de y n'est pas 9 alors x et y ont la même partie entière et les mêmes n premières décimales.

Preuve : On note $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N} \times [\![0,9]\!]^n$ tel que $0 \leq x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} < \frac{1}{10^n}$ et on note $(b_0, b_1, \dots, b_{n+1}) \in \mathbb{N} \times [\![0,9]\!]^n \times [\![0,8]\!]$ tel que $0 \leq y - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{b_k}{10^k} < \frac{1}{10^{n+1}}$. Par inégalité triangulaire on a $\left|x - \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k}\right| \leq |x - y| + \left|y - \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k}\right| < \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \leq \frac{1}{10^n}$ puisque $b_{n+1} \leq 8$. De plus on a $\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k} \leq y \leq x$ ainsi il vient $0 \leq x - \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k} < \frac{1}{10^n}$ ce qui permet de conclure que $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ par unicité du développement décimal d'un réel.

Propriété 2 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, si $0 \leq y - x \leq \frac{1}{10^{n+1}}$ et si la $n+1$ ème décimale de y n'est pas 9 alors x et y ont la même partie entière et les mêmes n premières décimales.

Preuve : En appliquant la propriété 1 au couple de réels $(-x, -y)$ compte tenu du fait que la $n+1$ ème décimale de $-y$ est égale à la $n+1$ ème décimale de y et qu'elle est différente de 9 on peut conclure que $-x$ et $-y$ ont la même partie entière et les mêmes n premières décimales ainsi le résultat en découle.

Théorème : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$, si $|x - y| \leq \frac{1}{10^{n+1}}$ et si la $n+1$ ème décimale de y n'est pas 9 alors x et y ont la même partie entière et les mêmes n premières décimales.

Preuve : Conséquence directe des deux premières propriétés.