Les fractions continues

On note $\forall x \in \mathbb{R}, [x]$ la partie entière de x et $\langle x\rangle = x - [x]$ la partie fractionnaire de x.

<u>Théorème :</u> (Approximation d'un réel par une fraction continue) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ avec $|p|$ et q strictement croissantes à partir d'un certain rang telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{{q_n}^2}$ et $p_n \wedge q_n = 1$.

• On construit par récurrence $\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en posant $\beta_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \beta_{n+1} = 1/\langle\beta_n\rangle$. La suite β est définie car si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\langle\beta_n\rangle = 0$ alors β_n est un entier et $\alpha \in \mathbb{Q}$. Pour le vérifier on pose $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = [\beta_n]$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f_n(x) = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x}}}}}$$

On remarque alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha = f_n(\beta_n)$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \beta_n$ est l'inverse d'une partie fractionnaire on a $\beta_n > 1$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = f_n(a_n) \in \mathbb{Q}$ et on souhaite dans la suite écrire r_n sous la forme d'une fraction. On définit par récurrence les suites p et q en posant $(p_0, q_0, p_1, q_1) = (a_0, 1, a_0 a_1 + 1, a_1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \\ q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n \end{cases}$$

• Par récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_{n+2}(x) = \frac{xp_{n+1}+p_n}{xq_{n+1}+q_n}$ puisque $f_{n+3}(x) = [a_0, a_1, \dots, a_{n+2}, x] = \left[a_0, a_1, \dots, a_{n+1}, a_{n+2} + \frac{1}{x}\right] = f_{n+2}\left(a_{n+2} + \frac{1}{x}\right) = \frac{(xa_{n+2}+1)p_{n+1}+xp_n}{(xa_{n+2}+1)q_{n+1}+xq_n} = \frac{xp_{n+2}+p_{n+1}}{xq_{n+2}+q_{n+1}}$ et ceci prouve en particulier que $r_{n+2} = f_{n+2}(a_{n+2}) = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ ainsi on a $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \frac{p_n}{q_n}$.

• Remarquons que $s_{n+1} = p_{n+1}q_{n+2} - q_{n+1}p_{n+2} = p_{n+1}(a_{n+2}q_{n+1} + q_n) - q_{n+1}(a_{n+2}p_{n+1} + p_n) = p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)s_n$ et il vient par récurrence $s_n = (-1)^{n+1}$ ce qui montre en particulier que $p_n \wedge q_n = 1$. On déduit aussi que $r_{n+1} - r_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}} = \frac{-s_n}{q_n q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$ et on note (R_1) ce résultat. De plus on constate que $r_{n+2} - r_n = \frac{p_{n+2}q_n - p_n q_{n+2}}{q_n q_{n+2}} = \frac{(a_{n+2}p_{n+1}+p_n)q_n - p_n(a_{n+2}q_{n+1}+q_n)}{q_n q_{n+2}} = \frac{-a_{n+2}s_n}{q_n q_{n+2}} = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_n q_{n+2}}$ et on note (R_2) ce résultat. Comme q est strictement positive le résultat (R_1) montre que $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et le résultat (R_2) montre que $(r_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

• Comme $(q_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'entiers naturels non nuls strictement croissante le résultat (R_1) montre que $(r_{n+1} - r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ainsi $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes et elles convergent vers une limite commune. Puisque les suites $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes on déduit que la suite r appelée suite des réduites associée au développement en fraction continue α est convergente.

• Le point précédent nous permet de considérer pour $n \in \mathbb{N}$ la suite des réduites associée à la suite $(a_k)_{k\geq n}$ et de noter γ_n la limite de cette suite. On a $\gamma_n = \lim_{k\to\infty} [a_n, a_{n+1}, \dots, a_k] = a_n + 1/\gamma_{n+1} \geq a_n$ et en remarquant que $(f_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(f_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante il vient $\forall k \in \mathbb{N}, \alpha = f_{2k}(\gamma_{2k}) \geq f_{2k}(a_{2k}) = r_{2k}$ et $\alpha = f_{2k+1}(\gamma_{2k+1}) \leq f_{2k+1}(a_{2k+1}) = r_{2k+1}$ ce qui prouve avec (R_2) que $r_{2k} \leq r_{2k+2} \leq \alpha \leq r_{2k+3} \leq r_{2k+1}$. On vient de montrer que α est toujours entre deux valeurs consécutives de la suite r et il vient $\forall n \in \mathbb{N}, |\alpha - r_n| \leq |r_{n+1} - r_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{{q_n}^2}$ en utilisant (R_1). De plus la convergence de r vers α assure que p est de signe constant à partir d'un certain rang et elle est alors strictement monotone à partir de ce rang.

<u>Application :</u> Les suites $(n.\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n.\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admettent pas de limite finie ou infinie.

Si on note $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des réduites associée au développement en fraction continue de π on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, p_n.|\sin(p_n)| = p_n.|\sin(p_n - q_n\pi)| \leq p_n.|p_n - q_n\pi| \leq \frac{p_n}{q_n}$ d'après le théorème précédent donc $(n.\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite bornée, de plus $(p_n.\cos(p_n))^2 = {p_n}^2 - (p_n.\sin(p_n))^2$ est non bornée donc $(n.\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite non bornée. On raisonne de même avec la suite des réduites de $\pi/2$ pour conclure.