

# LES POLYEDRES REGULIERS

---

Définition : Un **polygone**  $\mathcal{P}$  est un ensemble fini de segments d'un espace affine euclidien de dimension 2 tel que chaque segment de  $\mathcal{P}$  soit relié en chacune de ses extrémités à un seul segment de  $\mathcal{P}$ . Les extrémités des segments de  $\mathcal{P}$  sont appelés les **sommets** de  $\mathcal{P}$  et les segments de  $\mathcal{P}$  sont appelés les **côtés** de  $\mathcal{P}$ .

Définition : Un **polyèdre**  $\mathcal{P}$  est un ensemble fini de polygones d'un espace affine euclidien de dimension 3 tel que chaque polygone de  $\mathcal{P}$  soit relié en chacun de ses côtés à un seul polygone de  $\mathcal{P}$ . Les côtés des polygones de  $\mathcal{P}$  sont appelés les **arêtes** de  $\mathcal{P}$  et les polygones de  $\mathcal{P}$  sont appelés les **faces** de  $\mathcal{P}$ .

Définition : Deux parties  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  d'un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$  sont dites **isométriques** s'il existe une bijection de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathcal{E}$  qui conserve la norme de  $\mathcal{E}$  et qui envoie  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{P}'$ .

*Intuitivement deux parties d'un espace affine euclidien sont isométriques lorsqu'elles sont identiques mais qu'elles se trouvent à des endroits différents de l'espace affine euclidien.*

Définition : Deux sommets  $A$  et  $B$  d'un polygone ou d'un polyèdre  $\mathcal{P}$  sont dits **localement isométriques** s'il existe  $r > 0$  tel que l'intersection de  $\mathcal{P}$  et de la boule de centre  $A$  et de rayon  $r$  soit isométrique à l'intersection de  $\mathcal{P}$  et de la boule de centre  $B$  et de rayon  $r$ .

Définition : Un polygone est dit **régulier** si tous ses côtés sont isométriques et si tous ses sommets sont localement isométriques.

*Un polygone est régulier si et seulement si ses côtés sont de même longueur et ses angles de même mesure. Il existe une infinité de polygones réguliers non semblables.*

Définition : Le **degré** d'un sommet  $A$  d'un polyèdre est le nombre d'arête du polyèdre qui ont  $A$  pour extrémité.

*Deux sommets d'un polyèdre localement isométriques ont le même degré et le même ensemble de mesures d'angles mais la réciproque est fautive lorsque les sommets sont de degré au moins 4.*

Définition : Un polyèdre est dit **régulier** si toutes ses faces sont isométriques, toutes ses arêtes sont isométriques et si tous ses sommets sont localement isométriques.

*Un polyèdre est régulier si et seulement si toutes ses faces sont identiques et régulières et tous ses sommets sont de même degré. Il existe seulement 5 polyèdres réguliers non semblables. Si la face est un triangle équilatéral les sommets sont de degré 3, 4 ou 5 (car  $6 \times 60 = 360$ ) et on obtient respectivement un tétraèdre régulier, octaèdre régulier et icosaèdre régulier. Si la face est un carré les sommets sont de degré 3 (car  $4 \times 90 = 360$ ) et on obtient un cube. Si la face est un pentagone les sommets sont de degré 3 (car  $4 \times 108 > 360$ ) et on obtient un dodécaèdre régulier.*

➤ *Pourquoi ne pas juste imposer « faces identiques et angles identiques en chaque sommet » ?*

*Si on colle deux tétraèdres réguliers identiques en superposant les faces on obtient un polyèdre à 5 sommets. Ce polyèdre a des faces identiques et des angles identiques en chacun de ses sommets mais ce n'est pas un polyèdre régulier. Il a des sommets de degré 3 et des sommets de degré 4.*

➤ *Pourquoi ne pas juste imposer « faces identiques et sommets de même degré » ?*

*Considérons un cube « étiré » suivant une de ses diagonales (il s'agit d'un parallélépipède dont toutes les arêtes sont de même mesure appelé rhomboèdre). Ce polyèdre a des faces identiques (ce sont des losanges) et des sommets de même degré mais ce n'est pas un polyèdre régulier. Un sommet qui se trouve sur la « diagonale étirée » n'a pas le même ensemble de mesures d'angles qu'un sommet qui ne se trouve pas sur la « diagonale étirée ».*

➤ *Pourquoi ne pas juste imposer « faces identiques et sommets identiques » ?*

*Traçons un triangle scalène et reions les milieux de chacun de ses côtés entre eux. Nous obtenons le patron d'un tétraèdre dont toutes les faces sont identiques et dont tous les sommets sont localement isométriques. Il y a ainsi une infinité de polyèdres à 4 faces non semblables dont les faces sont identiques et les sommets sont localement isométriques.*