La dérivation discrète

Tearii CRIDLAND.

Référence utilisée :
"Panorama des mathématiques du supérieur" (PMS),
disponible aux éditions Ellipses.

Définition 1: On note Δ l'application $u \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vers $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite $\Delta(u)$ notée plus simplement Δu est appelée la **dérivée discrète** de u.

Remarque 1: Attention la dérivée de certaines suites est déja définie dans la littérature mathématique classique, en particulier pour les suites presque nulles, la dérivée de la suite $X = (0,1,0,0,0,\dots)$ est la suite $(1,0,0,0,\dots)$. Il ne faut donc pas appeler Δu simplement la dérivée de u.

Propriété 1: L'application Δ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et son noyau est l'ensemble des suites constantes.

Preuve : On vérifie facilement que Δ est linéaire, de plus si on considère $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alors on peut définir par récurrence une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en fixant $u_0 \in \mathbb{R}$ et en posant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + v_n$, la suite u ainsi définie est telle que $\Delta u = v$ ce qui prouve que Δ est surjective, on peut vérifier ensuite que si $u \in \operatorname{Ker}\Delta$ alors u est une suite constante de valeur u_0.

Théorème 1: $\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a ($u$ croissante $\iff$ Δu positive) et (u décroissante $\iff$ Δu négative) et (u constante $\iff$ Δu nulle).

Preuve : On a par exemple Δu positive si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$ si et seulement si u est croissante. Les autres équivalences se vérifient de la même façon.

Définition 2: $\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on appelle **primitive discrète** de u toute suite U telle que $\Delta U = u$.

Propriété 2: $\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, u admet une primitive discrète et deux primitives discrètes de u diffèrent d'une constante.

Preuve : C'est une conséquence directe de la propriété 1, u admet une primitive discrète par surjectivité de Δ et deux primitives discrètes de u diffèrent d'une constante d'après l'étude du noyau de Δ.

Théorème 2: $\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si U est une primitive discrète de u alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = [U_k]_0^{n+1} = U_{n+1} - U_0$.

Preuve : On a $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} U_{k+1} - U_k = U_{n+1} - U_0$.

Remarque 2: Le théorème 2 utilise la notation du crochet d'une fonction appliquée à une suite v en posant $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, [v_k]_n^p = v_p - v_n$.

Remarque 3: L'intégrale d'une suite est déjà définie[1] dans la littérature mathématique classique, le triplet $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), |.|)$ est un espace mesuré et pour deux entiers $n < p$ on a $\int_{[\![n,p]\!]} u = \sum_{k=n}^{p} u_k$.

Remarque 4: D'après le théorème 2, si l'on dispose d'une primitive discrète d'une suite on peut alors obtenir une expression simple de sa somme. Peut-on déterminer certaines primitives discrètes facilement ? On va maintenant définir quelques outils dans cet objectif.

Définition 3: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}$, si $k \leq n$ alors on note $n^{\underline{k}} = n!/(n-k)!$ et si $k > n$ alors on note $n^{\underline{k}} = 0$, on dit que $n^{\underline{k}}$ est le **nombre d'arrangements** de k parmi n.

Exemple 1: Voici quelques exemples de calcul :

— $7^{\underline{3}} = 7!/(7-3)! = 7 \times 6 \times 5$.

— $3^{\underline{4}} = 0$ car $3 < 4$.

— $5^{\underline{-3}} = 5!/(5-(-3))! = 5!/8! = 1/(6 \times 7 \times 8)$.

1. PMS : VIII.B.2.f.4.

<u>Propriété 3:</u> $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, une primitive discrète de $(n^{\underline{k}})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(n^{\underline{k+1}}/(k+1))_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve : On note $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^{\underline{k+1}}/(k+1)$ et on a pour $n > k$:

$$(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1} - \frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{(n+1)!}{(n-k)!} - \frac{n!}{(n-k-1)!}\right)$$

donc on obtient :

$$(\Delta u)_n = \frac{1}{k+1}\left(\frac{(n+1)! - (n-k)n!}{(n-k)!}\right) = \frac{1}{k+1}\left(\frac{(n+1-n+k)n!}{(n-k)!}\right) = n^{\underline{k}}$$

De plus si $n < k$ alors $n^{\underline{k}} = 0$ et $u_n = n^{\underline{k+1}}/(k+1) = 0 = u_{n+1}$ donc à nouveau $(\Delta u)_n = 0 = n^{\underline{k}}$. Enfin si $n = k$ on obtient toujours l'égalité puisque $(\Delta u)_k = k! = k^{\underline{k}}$.

Remarque 5: A la lecture de la propriété 3 on peut naturellement s'interroger sur le cas qui a été exclu où $k = -1$ et on peut en effet compléter cet énoncé par la propriété ci-dessous.

<u>Propriété 4:</u> Une primitive discrète de la suite $(n^{\underline{-1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est la série harmonique initialisée avec une première valeur nulle.

Preuve : Si on pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^{\underline{-1}} = n!/(n-(-1))! = 1/(n+1)$ ainsi que $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1/(k+1)$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta v)_n = 1/(n+1) = u_n$.

<u>Propriété 5:</u> Si on note $\forall n \in \mathbb{N}^*, X^{\underline{n}} = \prod_{j=0}^{n-1}(X-j)$ avec $X^{\underline{0}} = 1$ alors la famille $(X^{\underline{k}})_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Preuve : C'est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ non nuls de degrés deux à deux distincts et de cardinal $n+1$ donc[2] c'est bien une base.

Remarque 6: La matrice de la famille $(X^{\underline{k}})_{0\leq k\leq n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur sa diagonale. On peut s'en servir pour changer de base et calculer des sommes finies de la forme $\sum_{k=0}^{n} P(k)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$ compte tenu du théorème 2 et de la propriété 3.

<u>Exemple 2:</u> Considérons $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$, on remarque que $X^{\underline{3}} = X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X$ donc $X^3 = X^{\underline{3}} + 3X^2 - 2X$, de plus $X^{\underline{2}} = X(X-1) = X^2 - X$ donc $X^2 = X^{\underline{2}} + X$ puis $X^3 = X^{\underline{3}} + 3X^2 - 2X = X^{\underline{3}} + 3(X^{\underline{2}} + X) - 2X = X^{\underline{3}} + 3X^{\underline{2}} + X = X^{\underline{3}} + 3X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}}$, on déduit que $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}} = [k^{\underline{4}}/4 + k^{\underline{3}} + k^{\underline{2}}/2]_0^{n+1} = (n+1)^{\underline{4}}/4 + (n+1)^{\underline{3}} + (n+1)^{\underline{2}}/2 = 1/4(n+1)n(n-1)(n-2) + (n+1)n(n-1) + 1/2(n+1)n = 1/4(n+1)n[(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2] = 1/4(n+1)n(n^2+n) = n^2(n+1)^2/4$.

Remarque 7: Est-il possible d'utiliser cette théorie pour calculer des sommes finies de la forme $\sum_{k=0}^{n} F(k)$ avec $F \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle ? Il reste encore des questions ouvertes qui méritent d'être étudiées ...

2. PMS : I.F.1.c.6.