Le centre d'un objet

Tearii CRIDLAND.

Référence utilisée :
"Panorama des mathématiques du supérieur" (PMS),
disponible aux éditions Ellipses.

A) Centre d'un ensemble fini de points

On se place dans un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé.

Définition 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(M_1, \ldots, M_n) \in \mathscr{E}^n$, on note $\forall i \in [\![1, n]\!], c_i$ les coordonnées de M_i dans le repère orthonormé. On appelle **centre** de $(M_1, \ldots, M_n)$ le point M de coordonnées c où c est la moyenne de $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Remarque 1: Le centre M est appelé aussi l'isobarycentre de $(M_1, \ldots, M_n)$.

Propriété 1: $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si M de coordonnées x est le centre de $(M_1, \ldots, M_n) \in \mathscr{E}^n$ et si N de coordonnées y est le centre de $(N_1, \ldots, N_p) \in \mathscr{E}^p$ alors le centre de $(M_1, \ldots, M_n, N_1, \ldots, N_p)$ est le point de coordonnées $(n.x + p.y)/(n + p)$.

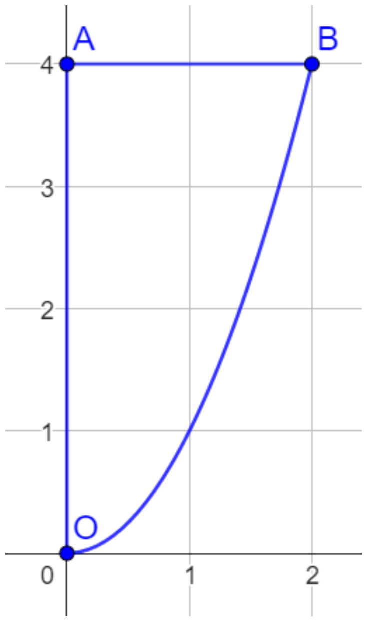
Remarque 2: Cette propriété traduit l'associativité de la notion de barycentre. On calcule le centre global avec une moyenne des coordonnées des deux centres pondérée par la quantité de points.

B) Centre d'une surface

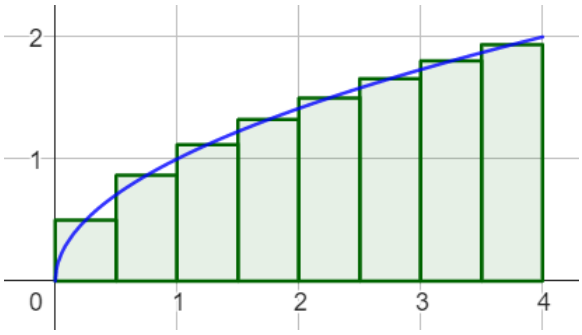
Exemple 1: La surface la plus simple à considérer pour commencer est celle d'un rectangle. Le rectangle a deux axes de symétrie, les surfaces de chaque côté de l'axe sont égales donc le centre d'une surface rectangulaire se trouve à l'intersection des deux axes. C'est aussi le point d'intersection de ses diagonales ou encore son centre de symétrie.

Remarque 3: Pour étudier le centre d'une surface quelconque on va approcher cette surface par des rectangles et utiliser l'associativité de la notion de centre.

Exemple 2: On considère les points $O(0, 0)$, $A(0, 4)$ et $B(2, 4)$ puis la surface délimitée par les segments $[OA]$ et $[AB]$ ainsi qu'une courbe reliant O et B correspondant au graphique de la fonction carré $t \mapsto t^2$. Déterminer les coordonnées du centre G de cette surface.



On peut approcher cette surface par une suite infinie de rectangles :



La surface est découpée en n rectangles qui ont tous une largeur égale à $4/n$ et leurs hauteurs sont les nombres $f(4(k+1/2)/n)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ et f la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$. L'ordonnée y_G du centre G est la moyenne des abscisses des centres de ces rectangles pondérée par leurs aires et plus n est grand plus le résultat de ce calcul sera précis, on obtient donc :

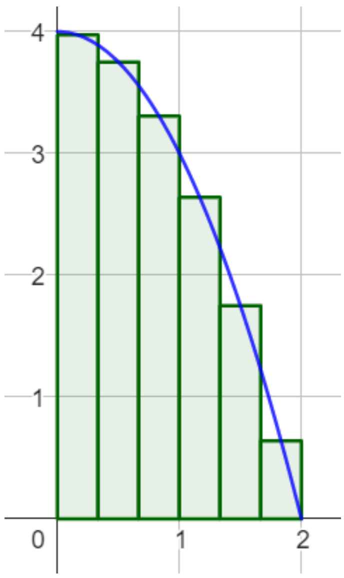
$$y_G = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 4/n f(4(k+1/2)/n) 4(k+1/2)/n}{\sum_{k=0}^{n-1} 4/n f(4(k+1/2)/n)}$$

La suite de fonctions en escalier définie par le découpage converge uniformément vers f donc les deux séries au numérateur et au dénominateur convergent par définition[1] de l'intégrale, on obtient ainsi :

$$y_G = \frac{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 4/n f(4(k+1/2)/n) 4(k+1/2)/n}{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 4/n f(4(k+1/2)/n)} = \frac{\int_0^4 t f(t) dt}{\int_0^4 f(t) dt}$$

On remarque que $\mathscr{A} = \int_0^4 f(t)dt = \int_0^4 \sqrt{t}dt = [t^{3/2}/(3/2)]_0^4 = 4^{3/2} \times 2/3 = 2^3 \times 2/3 = 16/3$ est l'aire de la surface étudiée. On a de plus $\int_0^4 tf(t)dt = \int_0^4 t\sqrt{t}dt = [t^{5/2}/(5/2)]_0^4 = 4^{5/2} \times 2/5 = 2^5 \times 2/5 = 64/5$ donc $y_G = 64/5 \times 3/16 = 12/5$.

Pour déterminer l'abscisse x_G de G il nous faut recommencer ces calculs mais en positionnant notre surface suivant un axe perpendiculaire au précédent :



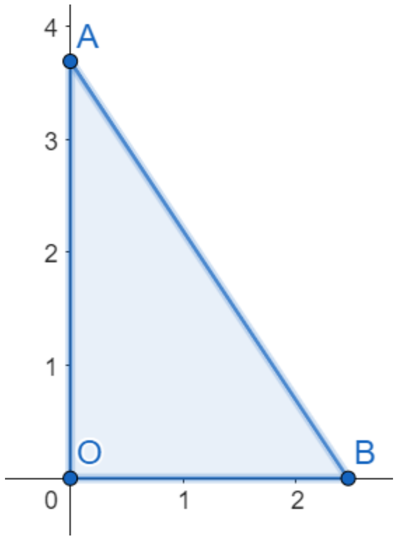
La surface est découpée en n rectangles qui ont tous une largeur égale à $2/n$ et leurs hauteurs sont les nombres $g(2(k+1/2)/n)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ et g la fonction $t \mapsto 4 - t^2$. L'abscisse x_G du centre G est la moyenne des abscisses des centres de ces rectangles pondérée par leurs aires et plus n est grand plus le résultat de ce calcul sera précis, on obtient donc :

$$x_G = \frac{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 2/n g(2(k+1/2)/n) 2(k+1/2)/n}{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 2/n g(2(k+1/2)/n)} = \frac{\int_0^2 t g(t) dt}{\int_0^2 g(t) dt} = \frac{\int_0^2 t g(t) dt}{\mathscr{A}}$$

1. PMS : VI.B.1.d.4.

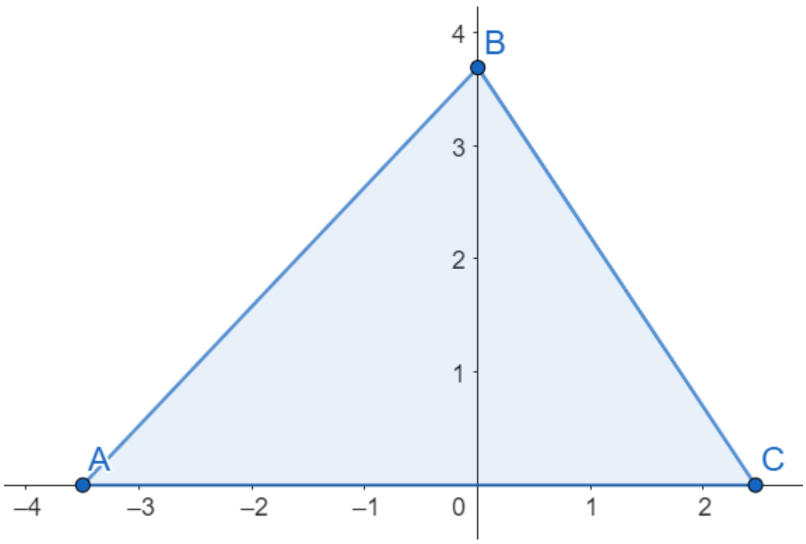
Il vient ensuite $\int_0^2 tg(t)dt = \int_0^2 t(4-t^2)dt = [4t^2/2 - t^4/4]_0^2 = 4\times 2^2/2 - 2^4/4 = 8-4 = 4$ donc $x_G = 4\times 3/16 = 12/16 = 3/4$ et finalement $G(3/4, 12/5)$.

Exemple 3: On considère les points $O(0,0), A(0,a)$ et $B(b,0)$ avec a et b des nombres réels strictement positifs. Déterminer les coordonnées du centre G de la surface délimitée par le triangle rectangle OAB.



L'aire du triangle rectangle est $\mathscr{A} = ab/2$ et le segment $[AB]$ est la représentation graphique de la fonction affine $t \mapsto -a/bt + a$ sur $[0,b]$ donc l'abscisse de G est $x_G = 1/\mathscr{A}\int_0^b t(-a/bt+a)dt = 1/\mathscr{A}[-at^3/(3b) + at^2/2]_0^b = 2/(ab)[-ab^3/(3b) + ab^2/2] = 2/(ab)\times 1/6\times ab^2 = b/3$. On peut échanger les rôles des points A et B dans le raisonnement précédent pour en déduire que $y_G = a/3$. Cet exemple nous montre que les coordonnées du centre de la surface d'un triangle rectangle peuvent être obtenues en calculant simplement la moyenne des coordonnées de ses sommets.

Exemple 4: On considère les points $A(-a,0), B(0,b)$ et $C(c,0)$ avec a, b et c des nombres réels strictement positifs. Déterminer les coordonnées du centre G de la surface délimitée par le triangle quelconque ABC.



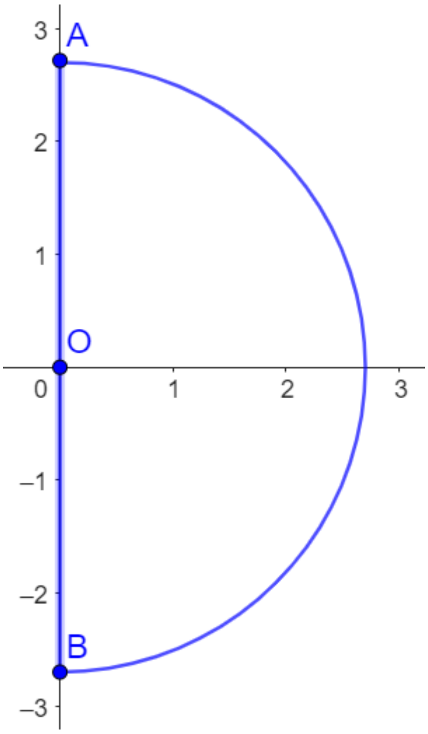
Un triangle quelconque peut toujours être divisé en deux triangles rectangles. Si on note O le point de coordonnées $(0,0)$ alors le centre de la surface triangulaire AOB a pour coordonnées $(-a/3, b/3)$ et le centre de la surface triangulaire BOC a pour coordonnées $(c/3, b/3)$ d'après l'exemple précédent. Pour trouver le centre (x_G, y_G) de la surface triangulaire ABC on calcule la moyenne de ces deux points pondérée par les aires des triangles ce qui nous donne :

$$(x_G, y_G) = \frac{2}{b(a+c)}\left(-\frac{a}{3}\times\frac{ab}{2} + \frac{c}{3}\times\frac{bc}{2}, \frac{b}{3}\times\frac{ab}{2} + \frac{b}{3}\times\frac{bc}{2}\right)$$

$$(x_G, y_G) = \frac{2}{b(a+c)}\left(\frac{bc^2 - ba^2}{6}, \frac{cb^2 + ab^2}{6}\right) = \left(\frac{c-a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

Cet exemple nous montre que les coordonnées du centre de la surface d'un triangle quelconque peuvent être obtenues en calculant simplement la moyenne des coordonnées de ses sommets.

Exemple 5: On considère un demi-cercle de rayon R et de centre $O(0,0)$. Les extrémités de ce demi-cercle sont notées A et B. Déterminer les coordonnées du centre G de la surface délimitée par ce demi-cercle.



La surface considérée est symétrique par rapport à l'axe des abscisses donc l'ordonnée de G est $y_G = 0$. Pour calculer l'abscisse x_G de G on va diviser le demi-cercle en deux parties égales. La partie supérieure du demi-disque est alors paramétrée par la fonction $f : t \mapsto \sqrt{R^2 - t^2}$ et son aire est $\pi R^2/4$. On obtient comme précédemment mais en utilisant un changement de variables :

$$x_G = \frac{\int_0^R tf(t)dt}{\pi R^2/4} = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R t\sqrt{R^2 - t^2}dt = \frac{-2}{\pi R^2}\int_0^R -2t\sqrt{R^2 - t^2}dt$$

$$x_G = \frac{-2}{\pi R^2}\left[(R^2 - t^2)^{3/2}/(3/2)\right]_0^R = \frac{2}{\pi R^2}\left((R^2 - 0^2)^{3/2} \times 2/3\right) = \frac{4R}{3\pi}$$

On vient en fait de calculer l'abscisse du centre de la partie supérieure du demi-disque, de même c'est aussi l'abscisse du centre de la partie inférieure du demi-disque. L'abscisse du centre du demi-disque est une moyenne de x_G et x_G pondérée par des surfaces identiques ce qui nous donne à nouveau x_G.

C) Centre d'une courbe

Exemple 6: La courbe la plus simple à considérer pour commencer est celle d'un segment. Le segment a un axe de symétrie, les longueurs de chaque côté de l'axe sont égales donc le centre d'un segment se trouve sur l'axe, il s'agit tout simplement de son milieu.

Remarque 4: Pour étudier le centre d'une courbe quelconque on va approcher cette courbe par des segments et utiliser l'associativité de la notion de centre. On aura besoin du théorème ci-dessous pour pouvoir mener à bien les calculs qui se présenteront.

Théorème 1: Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et γ une application de $[0,a]$ vers $\mathbb{C}$ de classe C^1, si f est une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ continue et si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n-1]\!]$ on note $c_k \in [ak/n, a(k+1)/n]$ alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\circ\gamma(c_k).\left|\gamma\left(a\frac{k+1}{n}\right)-\gamma\left(a\frac{k}{n}\right)\right| = \int_0^a (f\circ\gamma).|\gamma'|$$

Preuve : On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\circ\gamma(c_k).\left|\gamma\left(a\frac{k+1}{n}\right)-\gamma\left(a\frac{k}{n}\right)\right|$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $t_k \in [ak/n, a(k+1)/n]$ tel que $\gamma'(t_k) = (\gamma(a(k+1)/n) - \gamma(ak/n))/(a/n)$ d'après la formule [2] des accroissements finis ainsi on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} f\circ\gamma(c_k).|\gamma'|(t_k)$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} f\circ\gamma(t_k).|\gamma'(t_k)|$ et par définition [3] de l'intégrale en utilisant une suite adaptée de fonctions en escalier convergeant uniformément vers $(f\circ\gamma).|\gamma'|$ sur $[0,a]$ on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^a (f\circ\gamma).|\gamma'|$$

Par inégalité triangulaire on remarque que :

$$|S_n - I_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} \left|f\circ\gamma(c_k) - f\circ\gamma(t_k)\right|.|\gamma'(t_k)|$$

L'application $f\circ\gamma$ est continue sur le compact $[0,a]$ donc uniformément [4] continue ainsi pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $\forall(x,y) \in [0,a]^2, |x-y| \leq \eta \implies |f\circ\gamma(x) - f\circ\gamma(y)| \leq \varepsilon$, de plus on a $\forall k \in [\![0, n-1]\!], |c_k - t_k| \leq \frac{a}{n}$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$:

$$|S_n - I_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n}\varepsilon.|\gamma'(t_k)|$$

Par définition [3] de l'intégrale en utilisant une suite adaptée de fonctions en escalier convergeant uniformément vers $|\gamma'|$ on observe que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n}\varepsilon.|\gamma'(t_k)| = \varepsilon\int_0^a |\gamma'|$$

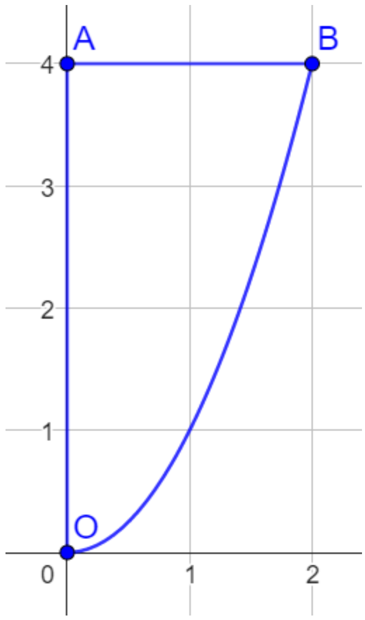
De plus cette dernière limite est celle d'une suite monotone donc d'après le théorème [5] de la limite monotone il vient :

$$|S_n - I_n| \leq \varepsilon\int_0^a |\gamma'|$$

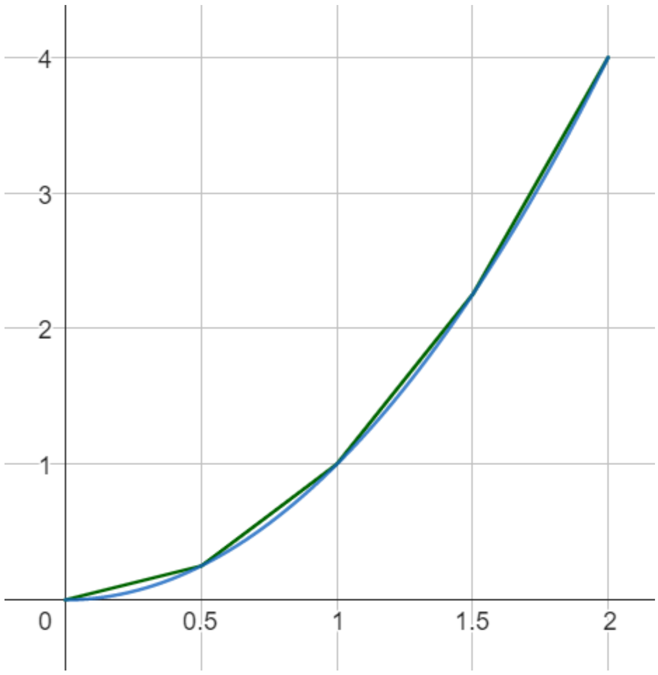
Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ on vient de montrer que $\lim_{n\to+\infty} |S_n - I_n| = 0$ et compte tenu du fait que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente on peut conclure que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente vers la même limite.

Exemple 7: On considère les points $O(0,0)$, $A(0,4)$ et $B(2,4)$ puis le contour délimité par les segments $[OA]$ et $[AB]$ ainsi qu'une courbe reliant O et B correspondant au graphique de la fonction carré $t \mapsto t^2$. Déterminer les coordonnées du centre G de ce contour.

2. PMS : VI.A.2.d.1. 3. PMS : VI.B.1.d.4. 4. PMS : II.C.3.b.1. 5. PMS : I.D.3.c.1.



Le centre du segment $[OA]$ est son milieu c'est à dire le point de coordonnées $(0, 2)$ et le centre du segment $[AB]$ est de même le point de coordonnées $(1, 4)$. Il reste à calculer le centre F de la courbe reliant O et B et pour cela on peut approcher cette courbe par une suite infinie de segments :



La surface est découpée en n segments qui ont tous une longueur égale à $|\gamma(2(k+1)/n) - \gamma(2k/n)|$ et un milieu de coordonnées $(2(k+1/2)/n, ((2(k+1)/n)^2 + (2k/n)^2)/2)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ et γ la fonction $t \mapsto (t, t^2)$. L'abscisse x_F du centre F est la moyenne des abscisses des centres de ces segments pondérée par leurs longueurs et plus n est grand plus le résultat de ce calcul sera précis, on obtient donc :

$$x_F = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 2(k+1/2)/n|\gamma(2(k+1)/n) - \gamma(2k/n)|}{\sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(2(k+1)/n) - \gamma(2k/n)|}$$

Les deux séries au numérateur et au dénominateurs convergent d'après le théorème 1 et on a ainsi :

$$x_F = \frac{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 2(k+1/2)/n|\gamma(2(k+1)/n) - \gamma(2k/n)|}{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(2(k+1)/n) - \gamma(2k/n)|} = \frac{\int_0^2 t.|\gamma'|(t)dt}{\int_0^2 |\gamma'|(t)dt}$$

On remarque que $\mathscr{L} = \int_0^2 |\gamma'|(t)dt = \int_0^2 \sqrt{1+4t^2}dt = 1/2\int_0^4 \sqrt{1+t^2}dt$ est la longueur de la courbe étudiée. Considérons h la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ qui est dans l'intégrale, sa primitive n'est pas évidente mais en notant I la fonction identité $t \mapsto t$ on a $h' = I/h$ ce qui veut dire que h est une primitive de I/h. De plus on a $(h+I)' = h'+1 = I/h+1 = (h+I)/h$ donc $(h+I)'/(h+I) = 1/h$, comme la primitive de $(h+I)'/(h+I)$ est $\ln|h+I|$ cela signifie que l'on connaît aussi une primitive de $1/h$. Peut-on exprimer h en fonction de I/h et de $1/h$? C'est presque possible puisque $h = (I^2+1)/h = I^2/h + 1/h$ donc si l'on trouve une primitive de I^2/h le calcul sera concluant. Une intégration par parties permet justement de régler ce dernier souci :

$$2\mathscr{L} = \int_0^4 h = \int_0^4 I^2/h + \int_0^4 1/h = [\ln|h+I|]_0^4 + [I \times h]_0^4 - \int_0^4 1 \times h$$

De l'égalité précédente on déduit que :

$$2\int_0^4 h = [\ln|h+I|]_0^4 + [I \times h]_0^4 = \ln(\sqrt{17}+4) - \ln(1) + 4\sqrt{17} = \ln(\sqrt{17}+4) + 4\sqrt{17}$$

On obtient ainsi $\mathscr{L} = \ln(\sqrt{17}+4)/4 + \sqrt{17}$ puis l'autre intégrale à calculer est :

$$\int_0^2 t\sqrt{1+4t^2}dt = 1/8\int_0^2 8t\sqrt{1+4t^2} = 1/8[(1+4t^2)^{3/2}/(3/2)]_0^2 = 1/12[(1+4t^2)^{3/2}]_0^2$$

Ce qui nous donne finalement $\int_0^2 t\sqrt{1+4t^2}dt = (17\sqrt{17}-1)/12$ puis :

$$x_F = \frac{17\sqrt{17}-1}{3\ln(\sqrt{17}+4) + 12\sqrt{17}}$$

L'ordonnée y_F du centre F est la moyenne des ordonnées des centres des segments pondérée par leurs longueurs et plus n est grand plus le résultat de ce calcul sera précis, on obtient comme précédemment :

$$y_F = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1}((2(k+1)/n)^2 + (2k/n)^2)/2|\gamma(2(k+1)/n) - \gamma(2k/n)|}{\sum_{k=0}^{n-1}|\gamma(2(k+1)/n) - \gamma(2k/n)|}$$

Si on note f la fonction $(x,y) \mapsto y$ alors on sait d'après le théorème 1 que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2(k+1)}{n}\right)^2 + \left(\frac{2k}{n}\right)^2\right)\left|\gamma\left(\frac{2(k+1)}{n}\right) - \gamma\left(\frac{2k}{n}\right)\right| = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 f\circ\gamma.|\gamma'| + \int_0^2 f\circ\gamma.|\gamma'|\right)$$

On obtient en conséquence :

$$y_F = \frac{\int_0^2 t^2|\gamma'|(t)dt}{\mathscr{L}} = \frac{1}{\mathscr{L}}\int_0^2 t^2\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{8\mathscr{L}}\int_0^4 t^2\sqrt{1+t^2}dt$$

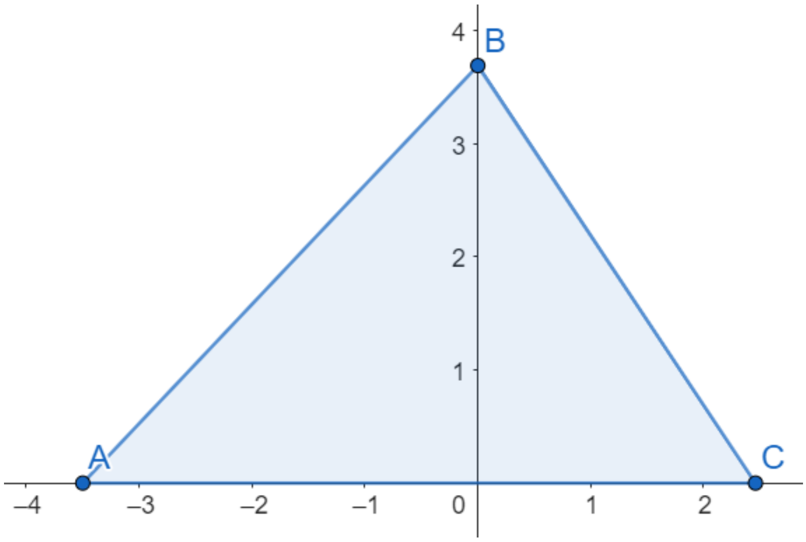
Il reste à calculer $\int_0^4 I^2h$ en utilisant les notations précédentes, on a $I^2h = I^2(I^2/h + 1/h) = I^4/h + I^2/h = I^4/h + h - 1/h$ et une intégration par parties donne $\int_0^4 I^2h = \int_0^4 h - \int_0^4 1/h - \int_0^4 3I^2h + [I^3h]_0^4$ donc $4\int_0^4 I^2h = \int_0^4 h - \int_0^4 1/h + [I^3h]_0^4 = \ln(\sqrt{17}+4)/2 + 2\sqrt{17} - [\ln|h+I|]_0^4 + [I^3h]_0^4$ puis il vient $\int_0^4 I^2h = 1/4(66\sqrt{17} - \ln(\sqrt{17}+4)/2) = 33/2\sqrt{17} - \ln(\sqrt{17}+4)/8$, ainsi on peut conclure que :

$$y_F = \frac{33/2\sqrt{17} - \ln(\sqrt{17}+4)/8}{2\ln(\sqrt{17}+4) + 8\sqrt{17}} = \frac{132\sqrt{17} - \ln(\sqrt{17}+4)}{16\ln(\sqrt{17}+4) + 64\sqrt{17}}$$

Les coordonnées (x_G, y_G) de G s'obtiennent en calculant une moyenne pondérée par les longueurs correspondantes des coordonnées de (x_F, y_F), $(0,2)$ et $(1,4)$:

$$(x_G, y_G) = \left(\frac{4\times 0 + 2\times 1 + \mathscr{L}x_F}{4+2+\mathscr{L}}, \frac{4\times 2 + 2\times 4 + \mathscr{L}y_F}{4+2+\mathscr{L}}\right) = \left(\frac{2+\mathscr{L}x_F}{6+\mathscr{L}}, \frac{16+\mathscr{L}y_F}{6+\mathscr{L}}\right)$$

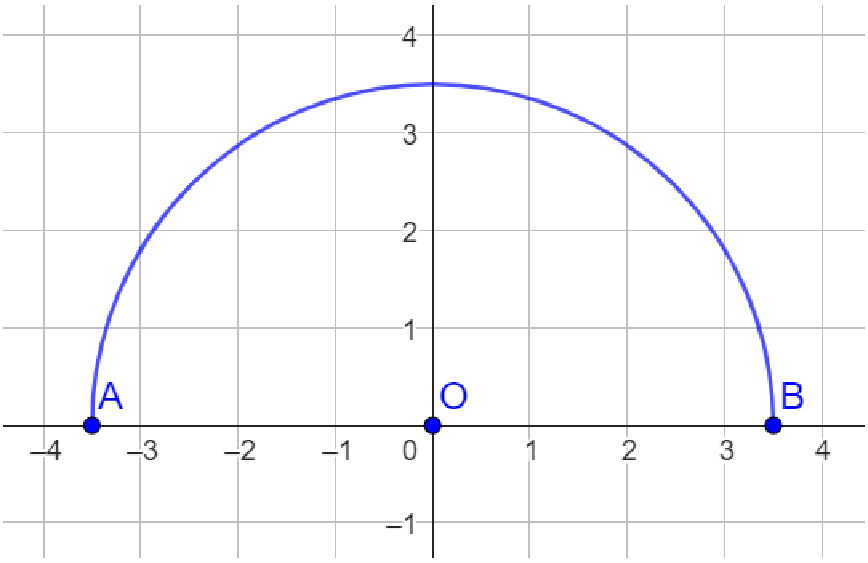
EXEMPLE 8: On considère les points $A(-a,0), B(0,b)$ et $C(c,0)$ avec a, b et c des nombres réels strictement positifs. Déterminer les coordonnées du centre G du contour délimité par le triangle ABC.



Le segment $[AB]$ a pour milieu $(-a/2, b/2)$ et pour longueur $\sqrt{a^2+b^2}$, le segment $[BC]$ a pour milieu $(c/2, b/2)$ et pour longueur $\sqrt{b^2+c^2}$, le segment $[AC]$ a pour milieu $((c-a)/2, 0)$ et pour longueur $a+c$, on calcule la moyenne des milieux pondérée par les longueurs correspondantes et on obtient :

$$(x_G, y_G) = \left(\frac{-a\sqrt{a^2+b^2}+c\sqrt{b^2+c^2}+c^2-a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}+2\sqrt{b^2+c^2}+2(a+c)}, \frac{b\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{b^2+c^2}}{2\sqrt{a^2+b^2}+2\sqrt{b^2+c^2}+2(a+c)}\right)$$

EXEMPLE 9: On considère un demi-cercle de rayon R et de centre $O(0,0)$. Les extrémités de ce demi-cercle sont notées A et B. Déterminer les coordonnées du centre G du contour délimité par ce demi-cercle.



Le contour considéré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc l'abscisse de G est $x_G = 0$. Pour calculer y_G on utilise la fonction $\gamma : t \mapsto (t, \sqrt{R^2-t^2})$ et puisque la longueur du contour est πR on sait que :

$$\pi R y_G = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-t^2}|\gamma'|(t)dt = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-t^2}\sqrt{1+t^2/(R^2-t^2)}dt = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2} = 2R^2$$

Les coordonnées de G sont ainsi $(0, 2R/\pi)$.

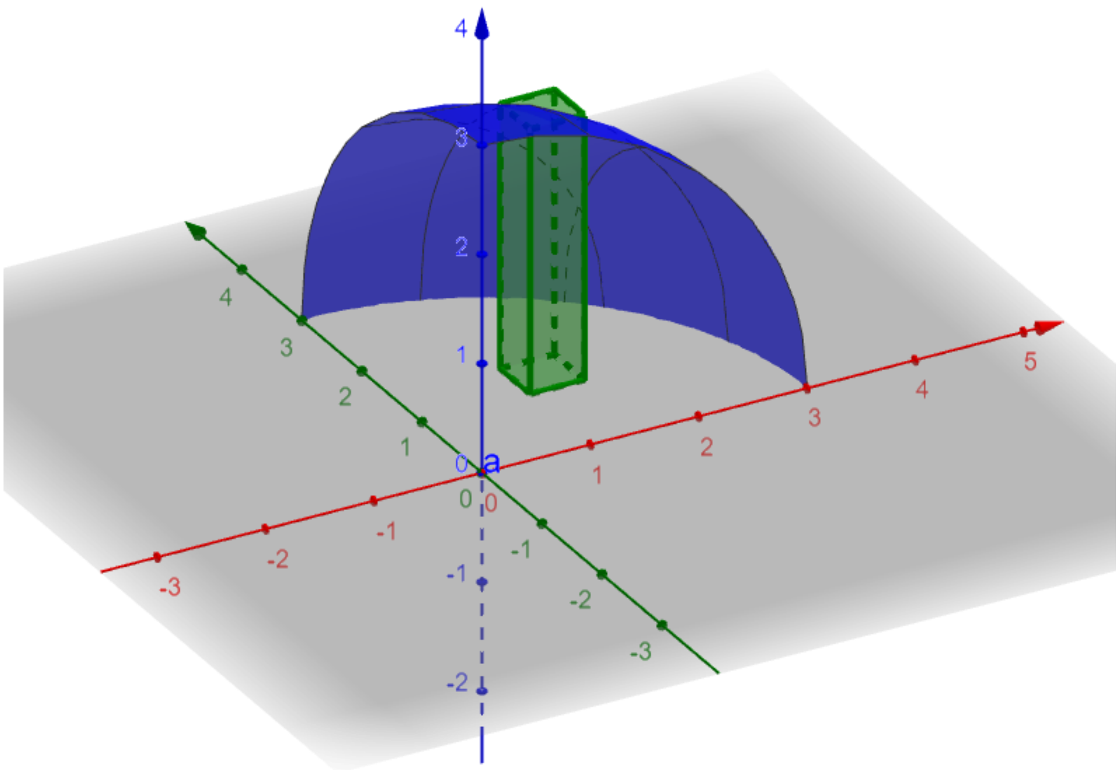
D) Centre d'un solide

<u>Exemple 10:</u> Le solide le plus simple à considérer pour commencer est le pavé droit. Le pavé droit a trois plans de symétrie, les volumes de chaque côté d'un plan de symétrie sont égaux donc le centre d'un pavé droit se trouve à l'intersection des trois plans de symétrie. C'est aussi le point d'intersection de ses diagonales ou encore son centre de symétrie.

Remarque 5: Pour étudier le centre d'un solide quelconque on va approcher ce solide par des pavés droits et utiliser l'associativité de la notion de centre.

<u>Exemple 11:</u> On considère une demi-boule de rayon R et de centre $O(0,0,0)$ sectionnée par le plan de cote nulle. Déterminer les coordonnées du centre G de cette demi-boule.

La demi-boule admet deux plans de symétrie donc $(x_G, y_G) = (0,0)$ et il reste à déterminer z_G. On peut ensuite découper la démi-boule en 4 parties égales et considérer seulement l'une d'entre elles :



La fonction à considérer est $f : (x,y) \mapsto \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ sur le domaine :

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x^2 + y^2 < R^2 \text{ et } 0 < x < R \text{ et } 0 < y < R\}$$

Le volume $\mathscr{V}$ mis en jeu est celui du huitième d'une boule donc $\mathscr{V} = (4/3\pi R^3)/8 = \pi R^3/6$. Ce volume est découpé en n^2 pavés droits qui ont tous une base carrée d'aire $(R/n)^2$ et leurs hauteurs sont les nombres $f(R(i+1/2)/n, R(j+1/2)/n)$ avec $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$. La côte z_G est la moyenne des abscisses des centres de ces pavés droits pondérée par leurs volumes et plus n est grand plus le résultat de ce calcul sera précis, on obtient donc :

$$\mathscr{V} z_G = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{R}{n} \frac{R}{n} f\left(\frac{R(i+1/2)}{n}, \frac{R(j+1/2)}{n}\right) \frac{R(i+1/2)}{n}$$

La suite de fonctions étagées définie par le découpage converge simplement vers f et elle est majorée par la fonction constante R intégrable sur $\mathscr{D}$ donc d'après le théorème [6] de convergence dominée on a :

$$\mathscr{V} z_G = \int_{\mathscr{D}} x.f(x,y)dxdy = \int_{\mathscr{D}} x\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$$

On va effectuer un changement [7] de variables, l'application $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ notée ϕ est de classe C^1 et son jacobien est $\det((\cos\theta, -r\sin\theta), (\sin\theta, r\cos\theta)) = r$, ce jacobien ne s'annule pas sur l'ouvert $]0, R[\times]0, \pi/2[$ et d'après le théorème [8] d'inversion globale on déduit que ϕ est un C^1 difféomorphisme de $]0, R[\times]0, \pi/2[$ sur $\mathscr{D}$ ainsi il vient :

$$\mathscr{V} z_G = \int_{\mathscr{D}} x\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy = \int_0^R \int_0^{\pi/2} r\cos\theta\sqrt{R^2 - (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2}.rdrd\theta$$

En utilisant le théorème [9] de Fubini on trouve ensuite :

$$\mathscr{V} z_G = \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^2\cos\theta\sqrt{R^2 - r^2}drd\theta = [\sin\theta]_0^{\pi/2} \int_0^R r^2\sqrt{R^2 - r^2}dr = \int_0^R r^2\sqrt{R^2 - r^2}dr$$

Considérons la fonction $t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$ notée h et la fonction identité $t \mapsto t$ notée I de sorte que $\mathscr{V} z_G = R^4 \int_0^1 I^2 h$ en utilisant un changement de variables, d'autre part on a $\int_0^1 h = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\cos\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{\pi/2}(\cos(2\theta) + 1)/2d\theta = \pi/4$ et $\int_0^1 1/h = \int_0^{\pi/2} \cos\theta/\sqrt{1 - \sin^2\theta}d\theta = \pi/2$, puisque $h' = -I/h$ on sait que h est la primitive de $-I/h$ et en utilisant une intégration par parties avec le fait que $I^2 h = I^2(1 - I^2)/h = I^2/h - I^4/h = 1/h - h - I^4/h$ on a $\int_0^1 I^2 h = \int_0^1 1/h - \int_0^1 h - \int_0^1 I^4/h = \pi/2 - \pi/4 + \int_0^1 -3I^2 h + [I^3 h]_0^1 = \pi/4 + \int_0^1 -3I^2 h$ donc $4\int_0^1 I^2 h = \pi/4$ puis $\int_0^1 I^2 h = \pi/16$ et $\mathscr{V} z_G = R^4\pi/16$ ce qui nous donne finalement :

$$z_G = \frac{R^4\pi/16}{\mathscr{V}} = \frac{R^4\pi/16}{\pi R^3/6} = \frac{3R}{8}$$

6. PMS : VIII.B.3.c.1. 7. PMS : VIII.B.4.e.1. 8. PMS : VIII.A.2.e.1. 9. PMS : VIII.B.4.d.1.