Le théorème du couple modèle

Tearii CRIDLAND.

3 juin 2023

Référence utilisée :
"Panorama des mathématiques du supérieur" (PMS),
disponible aux éditions Ellipses.

A) Les propriétés préliminaires

Propriété 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et C un convexe de $\mathbb{R}^n$, si $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille d'applications convexes sur C alors l'application $\sum_{i=1}^n f_i$ est convexe sur C.

[Voir le détail]

Propriété 2: Soit f une application affine de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, si $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ est tel que $\alpha+\beta+\gamma = 1$ alors on a $f(\alpha.a+\beta.b+\gamma.c) = \alpha.f(a)+\beta.f(b)+\gamma.f(c)$.

[Voir le détail]

Propriété 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application affine de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, si $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ alors l'application $\|f\|$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

[Voir le détail]

Propriété 4: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et C un convexe de $\mathbb{R}^n$, si f est une application convexe sur C qui admet un minimum local en $x \in C$ alors ce minimum est global et ainsi on a $\min_C f = f(x)$.

[Voir le détail]

Propriété 5: Soit $n \geq 2$ et $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'applications affines de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ strictement croissantes, on note $\forall i \in [\![1,n]\!], a_i$ le coefficient directeur de f et c_i le zéro de f, on suppose que la famille $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ a été ordonnée de sorte que la famille $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ soit croissante et on considère $f = \sum_{i=1}^n |f_i|$, si on note $A = \sum_{i=1}^n a_i$ et $k = \min\{i \in [\![1,n]\!] \mid \sum_{j\leq i} a_j \geq A/2\}$ alors on a $\min_{\mathbb{R}} f = f(c_k)$ et si on a de plus $\sum_{j\leq k} a_j \neq A/2$ alors ce minimum global de f sur $\mathbb{R}$ est unique.

[Voir le détail]

Remarque 1: Si f est une application à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors $|f|$ désigne la valeur absolue de f mais si X est un ensemble alors $|X|$ désigne le cardinal de X.

Remarque 2: La propriété montre que f admet toujours un minimum global sur $\mathbb{R}$ et que si on note $\mathcal{Z} = \{f(c_i)|i \in [\![1,n]\!]\}$ alors on a $\min_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathcal{Z}} f$.

Propriété 6: Soit $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'applications affines de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ non constantes avec $n \geq 2$ et $f = \sum_{i=1}^n |f_i|$, on note $\forall i \in [\![1,n]\!], D_i = f_i^{-1}(\{0\})$ et on suppose que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i \neq j$ on a $|D_i \cap D_j| = 1$, si on note $\mathcal{Z} = \{D_i \cap D_j | (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ et } i \neq j\}$ alors on a $\min_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathcal{Z}} f$.

[Voir le détail]

B) Le théorème du couple modèle

Définition 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de réels positifs de somme A, le nombre entier $\min\{i \in [\![1,n]\!] \mid \sum_{j\leq i} a_j \geq A/2\}$ est appelé l'**indice médian** de la famille $(a_i)_{1\leq i\leq n}$.

Remarque 3: L'indice médian dépend de la famille $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et pas de l'ensemble $\{a_i|i \in [\![1,n]\!]\}$ ainsi l'ordre est important.

Remarque 4: Il s'agit d'aligner à la suite et dans l'ordre des segments de longueurs $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ puis de chercher sur quel segment se trouve le milieu du segment de longueur totale.

Définition 2: Soit $\mathscr{P}$ un plan affine de direction $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, soit un point $M \in \mathscr{P}$ et $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n points distincts de $\mathscr{P}$ qui n'ont pas la même abscisse que M, on note $\forall i \in [\![1, n]\!], c_i$ le coefficient directeur de la droite (MM_i) et d_i la valeur absolue de la différence entre les abscisses des points M et M_i, on suppose que la famille $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ a été ordonnée de sorte que la famille $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ soit croissante et de sorte que les points alignés avec M soient rangés par abscisse croissante, si k est l'indice médian de la famille $(d_i)_{1\leq i\leq n}$ alors M_k est appelé le **point à l'horizon** de M et il est noté $\mathscr{H}(M)$.

Remarque 5: On s'assure dans cette définition que la famille $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ est rangée de manière unique pour pouvoir définir une application $\mathscr{H}$.

Exemple 1: Considérons les points $M(1;3), M_1(-9;1), M_2(5;0), M_3(4;-2)$ et déterminons $\mathscr{H}(M)$, les coefficients directeurs des droites $(MM_1), (MM_2)$ et (MM_3) sont respectivement $2/10, -3/4$ et $-5/3$, on obtient dans l'ordre croissant $-5/3 < -3/4 < 2/10$ et les dénominateurs positifs de ces fractions non simplifiées sont dans l'ordre $(3, 4, 10)$, l'indice médian de la famille $(3, 4, 10)$ étant 3 on déduit que le point à l'horizon de M est celui correspondant au calcul du 3-ème coefficient directeur dans l'ordre croissant c'est à dire $\mathscr{H}(M) = M_1$.

Remarque 6: On peut considérer $\mathscr{H}^2 = \mathscr{H} \circ \mathscr{H}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \mathscr{H}^k$ l'application $\mathscr{H}$ composée k fois.

Remarque 7: Si l'on dispose du graphique sous les yeux, on peut commencer par chercher la somme T des valeurs absolues des écarts d'abscisses entre M et les autres points, on trouve ensuite $\mathscr{H}(M)$ en considérant une droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par M qui tourne dans le même sens que l'orientation du repère, à mesure que cette droite passe par les différents points on cumule les valeurs absolues des écarts d'abscisses jusqu'à dépasser $T/2$.

Définition 3: Soit $\mathscr{P}$ un plan affine de direction $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de points de $\mathscr{P}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute droite d de $\mathscr{P}$ qui n'a pas pour vecteur directeur $\overrightarrow{j}$ on appelle **erreur d'approximation** de d le nombre $\varepsilon(d) = \sum_{i=1}^{n} M_iP_i$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!], P_i$ le projeté de M_i sur d parallèlement à $\overrightarrow{j}$. Pour une droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$ on pose $\varepsilon(d) = +\infty$. Une droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ est dite **optimale** pour approcher la famille $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ si on a $\varepsilon(\mathscr{D}) = \min\{\varepsilon(d) | d \text{ droite de } \mathscr{P}\}$.

Théorème 1: (Couple modèle) Soit $\mathscr{P}$ un plan affine de direction $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\mathcal{E}$ un ensemble fini de points de $\mathscr{P}$ qui ont des abscisses deux à deux différentes, $\forall M \in \mathcal{E}, \exists p \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathscr{H}^k(M))_{k\geq p}$ soit une suite de points alignés et la droite passant par $\mathscr{H}^p(M)$ et $\mathscr{H}^{p+1}(M)$ est alors optimale pour approcher $\mathcal{E}$.

[Voir le détail]

Remarque 8: Le théorème montre un résultat remarquable, il est toujours possible de trouver une droite optimale en reliant simplement deux points de l'ensemble $\mathcal{E}$, de plus le théorème fournit un moyen pratique pour trouver ce couple de points. On peut conjecturer un résultat plus fort : $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{H}^p(M) = \mathscr{H}^{p+2}(M)$ et la droite passant par $\mathscr{H}^p(M)$ et $\mathscr{H}^{p+1}(M)$ est optimale pour approcher $\mathcal{E}$.

Exemple 2: On reprend les points de l'exemple 1 et on va calculer $\mathscr{H}^2(M) = \mathscr{H}(M_1)$, les coefficients directeurs des droites $(M_1M), (M_1M_2)$ et (M_1M_3) sont respectivement $2/10, -1/14$ et $-3/13$, on obtient dans l'ordre croissant $-3/13 < -1/14 < 2/10$ et les dénominateurs positifs de ces fractions non simplifiées sont dans l'ordre $(13, 14, 10)$, l'indice médian de cette famille est 2 donc $\mathscr{H}^2(M) = M_2$, de même les coefficients directeurs des droites $(M_2M), (M_2M_1)$ et (M_2M_3) sont respectivement $-3/4, -1/14$ et $2/1$, on obtient dans l'ordre croissant $-3/4 < -1/14 < 2/1$ et l'indice médian de $(4, 14, 1)$ est 2 donc $\mathscr{H}^3(M) = M_1 = \mathscr{H}^1(M)$. D'après le théorème 1 une droite optimale pour approcher les points (M, M_1, M_2, M_3) est la droite (M_1M_2).

Preuves

Preuve - Propriété 1: [Voir l'énoncé] On sait que $\forall i \in [\![1,n]\!], f_i$ est convexe sur C donc $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,1], f_i(t.a+(1-t).b) \leq t.f_i(a)+(1-t).f_i(b)$ puis en sommant ces inégalités on obtient $f(t) \leq t.f(a)+(1-t).f(b)$ avec $f = \sum_{i=1}^n f_i$ ce qui prouve que f est convexe sur C.

PREUVE - PROPRIÉTÉ 2: [Voir l'énoncé] Comme f est affine on sait qu'il existe $q \in \mathbb{R}^n$ tel que l'application $f-q$ notée g soit linéaire, on a $g(\alpha.a+\beta.b+\gamma.c) = \alpha.g(a)+\beta.g(b)+\gamma.g(c)$ puis $f(\alpha.a+\beta.b+\gamma.c)-q = \alpha.f(a)-\alpha.q+\beta.f(b)-\beta.q+\gamma.f(c)-\gamma.q = \alpha.f(a)+\beta.f(b)+\gamma.f(c)-q$ d'où le résultat. On pouvait aussi obtenir cette propriété en utilisant le fait qu'une application affine conserve [1] les barycentres.

PREUVE - PROPRIÉTÉ 3: [Voir l'énoncé] Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$, d'après la propriété 2 appliquée aux vecteurs $(x,y,0)$ et aux réels $(t,1-t,0)$ on a $f(t.x+(1-t).y) = f(t.x+(1-t).y+0.0) = t.f(x)+(1-t).f(y)+0.f(0) = t.f(x)+(1-t).f(y)$ donc $\|f\|(t.x+(1-t).y) = \|f(t.x+(1-t).y)\| = \|t.f(x)+(1-t).f(y)\| \leq t.\|f\|(x)+(1-t).\|f\|(y)$ par inégalité triangulaire.

PREUVE - PROPRIÉTÉ 4: [Voir l'énoncé] Soit $y \in C$ et $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, comme x est un minimum local de f on peut noter $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que que $\forall z \in C, \|z-x\| < r \implies f(z) \geq f(x)$, de plus $\forall t \in [0,1]$ en posant $z = x+t.(y-x)$ on a $f(z) = f(t.y+(1-t).x) \leq t.f(x)+(1-t).f(y) = f(x)+t.(f(y)-f(x))$ car f est convexe, supposons $y \neq x$ pour considérer $t \in]0; r/|y-x|[$ et obtenir $\|z-x\| = t.\|y-x\| < r$, il vient alors $0 \leq f(z)-f(x) \leq t.(f(y)-f(x))$ puis $f(x) \leq f(y)$, cette dernière inégalité est de plus évidente lorsque $x = y$ ce qui achève la preuve.

PREUVE - PROPRIÉTÉ 5: [Voir l'énoncé]
• On note $\forall i \in [\![1,n]\!], b_i \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f_i(x) = a_i x + b_i$, l'ensemble $\{i \in [\![1,n]\!] \mid \sum_{j\leq i} a_j \geq A/2\}$ est non vide car il contient n donc il admet bien un minimum noté k, on obtient ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{j\leq k} a_j \geq A/2 \\ \sum_{j\leq k+1} a_j < A/2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \sum_{j\leq k} a_j + \sum_{j\leq k} a_j \geq A \\ \sum_{j<k} a_j + \sum_{j<k} a_j < A \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \sum_{j\leq k} a_j \geq \sum_{j>k} a_j \\ \sum_{j<k} a_j < \sum_{j\geq k} a_j \end{array}\right.$$

• En posant $c_{n+1} = +\infty$ on peut considérer $v = \min\{i \in [\![1,n+1]\!] \,|c_i > c_k\}$, de plus en posant $K = \{i \in [\![1,n]\!] \,|c_i = c_k\}$ on peut distinguer 3 cas pour $j \in [\![1,n]\!]$:

— Si $j \leq k$ alors f_j est strictement croissante de zéro c_j et $c_j \leq c_k$ donc f_j est positive sur $[c_k, +\infty[$.

— Si $j > k$ et $j \in K$ alors f_j est strictement croissante de zéro c_k donc f_j est positive sur $[c_k, +\infty[$.

— Si $j > k$ et $j \notin K$ alors $c_j > c_k$ donc $v \leq j$ puis $c_v \leq c_j$ ainsi f_j est négative sur $[-\infty, c_v[$.

Si on note $J_k = [c_k, c_v[$ on obtient alors $\forall x \in J_k, f(x) = \sum_{j\leq k} a_j x + b_j + \sum_{j>k \text{ et } j\in K} a_j x + b_j + \sum_{j>k \text{ et } j\notin K} -a_j x - b_j$ donc la restriction de f à J_k est une fonction affine de coefficient directeur $\beta = \sum_{j\leq k} a_j + \sum_{j>k \text{ et } j\in K} a_j - \sum_{j>k \text{ et } j\notin K} a_j \geq \sum_{j\leq k} a_j - \sum_{j>k \text{ et } j\in K} a_j \geq \sum_{j\leq k} a_j - \sum_{j>k} a_j$, d'après le point précédent on a $\beta \geq 0$ ainsi f est croissante sur J_k puis $f(x) \geq c_k$.
• En posant $c_0 = -\infty$ on peut considérer $u = \max\{i \in [\![0,n]\!] \,|c_i < c_k\}$ et de même pour $j \in [\![1,n]\!]$ on peut distinguer 3 cas :

— Si $j \geq k$ alors f_j est strictement croissante de zéro c_j et $c_j \geq c_k$ donc f_j est négative sur $]-\infty, c_k]$.

— Si $j < k$ et $j \in K$ alors f_j est strictement croissante de zéro c_k donc f_j est négative sur $]-\infty, c_k]$.

— Si $j < k$ et $j \notin K$ alors $c_j < c_k$ donc $j \leq u$ puis $c_j \leq c_u$ ainsi f_j est positive sur $]c_u, +\infty[$.

Si on note $I_k =]c_u, c_k]$ on obtient alors $\forall x \in I_k, f(x) = \sum_{j\geq k} -a_j x - b_j + \sum_{j<k \text{ et } j\in K} -a_j x - b_j + \sum_{j<k \text{ et } j\notin K} a_j x + b_j$ donc la restriction de f à I_k est une fonction affine de coefficient directeur $\alpha = \sum_{j<k \text{ et } j\notin K} a_j - \sum_{j<k \text{ et } j\in K} a_j - \sum_{j\geq k} a_j \leq \sum_{j<k \text{ et } j\notin K} a_j - \sum_{j\geq k} a_j \leq \sum_{j<k} a_j - \sum_{j\geq k} a_j$, d'après le premier point on a $\alpha < 0$ ainsi f est strictement décroissante sur I_k puis $f(x) \geq c_k$.

1. PMS : II.A.5.d.2.

• On a montré dans les deux points précédents que la restriction de f à $]c_u, c_v[$ admet un minimum en c_k, l'intervalle $]c_u, c_v[$ est un voisinage de c_k ainsi f admet un minimum local en c_k, puisque f est convexe d'après les propriétés 1 et 3 on sait alors que f admet un minimum global en c_k d'après la propriété 4, si on suppose de plus $\sum_{j\leq k} a_j \neq A/2$ alors on a $\beta > 0$ donc la restriction de f à I_k est strictement décroissante tandis que la restriction de f à J_k est strictement croissante, on obtient ainsi l'unicité du minimum global de f en c_k.

<u>Preuve - Propriété 6:</u> [Voir l'énoncé]

Étape (a) : Si on note $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ tel que $f(\sigma) = \min_{\mathcal{Z}} f$ et $I = \{i \in [\![1, n]\!] \,|\sigma \in D_i\}$ alors il existe une sphère S de centre σ et de rayon non nul R qui est disjointe de $\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I} D_i$.

Puisque $\mathcal{Z}$ est fini on peut considérer $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ tel que $f(\sigma) = \min_{\mathcal{Z}} f$ et on a $\sigma \notin \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I} D_i$ avec $|I| \geq 2$, comme $\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I} D_i$ est un fermé [2] de $\mathbb{R}^2$ on sait que $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I} D_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ainsi il existe une sphère S de centre σ et de rayon non nul qui est disjointe de $\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I} D_i$.

Étape (b) : $\forall i \in I, D_i \cap S$ est fini de cardinal 2.

Comme f_i est affine il existe $(a_i, b_i, c_i) \in \mathbb{R}^3$ tel que $D_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a_i x + b_i y + c_i = 0\}$, de plus S a pour centre $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ et il existe $R > 0$ tel que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - \sigma_1)^2 + (y - \sigma_2)^2 = R^2\}$, soit $(x, y) \in D_i \cap S$, comme $\sigma \in D_i$ on a $a_i(x - \sigma_1) + b_i(y - \sigma_2) = 0$ donc $b_i^2(y - \sigma_2)^2 = a_i^2(x - \sigma_1)^2$ puis $b_i^2(x - \sigma_1)^2 + b_i^2(y - \sigma_2)^2 = b_i^2 R^2 = (b_i^2 + a_i^2)(x - \sigma_1)^2$, puisque f_i est non constante $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ et $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$ donc la dernière égalité est une équation du second degré qui admet deux solutions ce qui montre que $D_i \cap S$ est fini de cardinal 2.

Étape (c) : Soit ϕ l'application $t \mapsto (\sigma_1 + R\cos t, \sigma_2 + R \sin t)$ de $\mathbb{R}$ vers S et $k = |I|$, il existe une famille de nombres réels $(t_i)_{1\leq i\leq 2k}$ dans $]-\pi, \pi]^{2k}$ croissante et de cardinal au moins 4 telle que si on note $\forall i \in [\![1, 2k]\!], s_i = \phi(t_i)$ et $s_{2k+1} = s_1$ alors on a $\forall j \in [\![1, n]\!], f_j$ de signe constant sur le triangle T_i de sommets (σ, s_i, s_{i+1}).

• $\forall i \in I, D_i \cap S$ est de cardinal 2 d'après l'étape (b) et comme $\{D_i | i \in I\}$ est de cardinal au moins 2 on sait que l'ensemble $D = \bigcup_{i\in I} D_i \cap S$ est de cardinal au moins 4, chaque élément de D est dans $\mathbb{R}^2$ et il peut être identifié à un nombre complexe, on peut ainsi considérer D' l'ensemble de tous les arguments principaux des éléments de D, comme les éléments de D ont le même module R on sait que D' est une partie [3] de $]-\pi, \pi]$ de cardinal au moins 4, on range tous les éléments de D' dans l'ordre croissant pour obtenir la famille $(t_i)_{1\leq i\leq 2k}$ dans $]-\pi, \pi]^{2k}$ croissante et de cardinal au moins 4, il est clair que ϕ est à valeurs dans S donc $(s_i)_{1\leq i\leq 2k+1}$ est une famille d'éléments de S.

• Il reste à montrer que $\forall j \in [\![1, n]\!], f_j$ est de signe constant sur le triangle T_i de sommets (σ, s_i, s_{i+1}), supposons que $\exists (x, y) \in T_i^2$ tel que $f_j(x)f_j(y) < 0$, considérons l'application $t \mapsto f_j(t.x + (1 - t).y)$ de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ notée φ_j, l'application φ_j est continue et on a $\varphi_j(0)\varphi_j(1) < 0$ donc d'après le théorème [4] des valeurs intermédiaires $\exists z \in [x, y]$ tel que $f_j(z) = 0$, de plus T_i est convexe donc $z \in D_j \cap T_i$ et comme T_i est inclus dans S et disjoint de $\bigcup_{l\in[\![1,n]\!]\setminus I} D_l$ on déduit que D_j est la droite passant par σ et s_i ou la droite passant par σ et s_{i+1}, on obtient l'alignement des points (z, x, y, σ, s_i) ou l'alignement des points $(z, x, y, \sigma, s_{i+1})$ et ces deux cas sont absurdes puisque $f_j(x)f_j(y) \neq 0$.

Étape (d) : Si $\forall s \in \bigcup_{i\in I} D_i \cap S, f(\sigma) \leq f(s)$ alors f admet un minimum en σ sur $\mathbb{R}^2$.

• On reprend les notations précédentes et on considère pour $i \in [\![1, 2k]\!], T_i$ le triangle de sommets (σ, s_i, s_{i+1}), par définition on a $T_i = \{\alpha.\sigma + \beta.s_i + \gamma.s_{i+1} | (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+)^3$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1\}$ et puisque $\bigcup_{i\in I} D_i \cap S = \{s_i | i \in [\![1, 2k]\!]\}$ on a $f(\sigma) \leq f(s_i)$ et $f(\sigma) \leq f(s_{i+1})$, de plus $\forall j \in [\![1, n]\!], f_j$ est de signe constant sur T_i d'après l'étape (b) donc la restriction de f à T_i est une fonction affine comme somme de fonctions affines, si $x \in T_i$ est noté $\alpha.\sigma + \beta.s_i + \gamma.s_{i+1}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+)^3$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ alors on a $f(x) = \alpha.f(\sigma) + \beta.f(s_i) + \gamma.f(s_{i+1}) \geq \alpha.f(\sigma) + \beta.f(\sigma) + \gamma.f(\sigma) = f(\sigma)$ d'après la propriété 2 ce qui prouve que f admet un minimum en σ sur $T = \bigcup_{i=1}^{2k} T_i$.

• Montrons à présent que T est un voisinage de σ en remarquant qu'il contient la boule ouverte de centre σ et de rayon $r = \min\{\|\sigma - (s_i + s_{i+1})/2\| \; |i \in [\![1, 2k]\!]\}$ où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, on note B cette boule ouverte de centre σ et de rayon r puis on considère $x \in B$ et comme $(s_i)_{1\leq i\leq 2k+1}$ est de cardinal au moins 4 on a $r > 0$, l'argument principal de x est dans $]-\pi, \pi]$ et

2. PMS : II.C.1.j.6. 3. PMS : I.E.2.d.2. 4. PMS : II.C.2.d.1.

puisque $(t_i)_{1\leq i\leq 2k}$ est une famille dans $]-\pi,\pi]^{2k}$ croissante il existe $i\in[\![1,2k]\!]$ tel que x soit dans la plus petite des deux parties de B délimitées par les demi-droites $[\sigma s_i)$ et $[\sigma s_{i+1})$, de plus la droite passant par σ et x admet un point d'intersection avec le segment $[s_i,s_{i+1}]$ noté x', comme $(s_i+s_{i+1})/2$ est le projeté orthogonal de σ sur $[s_i,s_{i+1}]$ on sait d'après le théorème [5] du projeté orthogonal que $\|\sigma-x\|\leq r\leq\|\sigma-x'\|$ donc x est sur le segment $[\sigma,x']$, le triangle T_i de sommets (σ,s_i,s_{i+1}) étant convexe on déduit que $x\in T_i$ puis que $x\in T$.

• D'après les deux points précédents f admet un minimum en σ sur T qui est un voisinage de σ, puisque f est convexe d'après les propriétés 1 et 3 on peut conclure que ce minimum local en σ est en fait un minimum global d'après la propriété 4.

Étape (e) : f admet un minimum en σ sur $\mathbb{R}^2$.

Comme $\forall j\in[\![1,n]\!], f_j$ est une application affine il existe $(a_j,b_j,c_j)\in\mathbb{R}^3$ tel que f_j soit l'application $(x,y)\mapsto a_jx+b_jy+c_j$ et puisque f_j est non constante on a $(a_j,b_j)\neq(0,0)$ ainsi il est possible de considérer $\forall i\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}, g_i$ l'application $x\mapsto a_ix+b_i(-a_j/b_jx-c_j/b_j)+c_i$ ou h_i l'application $y\mapsto a_i(-b_j/a_jy-c_j/a_j)+b_iy+c_i$, les applications g_i et h_i sont affines de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ avec un coefficient directeur non nul car $|D_i\cap D_j|=1$, si $(x,y)\in D_j$ alors on a $f(x,y)=g(x)=\sum_{i\neq j}|g_i(x)|$ ou $f(x,y)=h(y)=\sum_{i\neq j}|h_i(y)|$, on peut supposer que les applications g_i et h_i ont un coefficient directeur strictement positif en considérant si nécessaire leurs opposées de sorte que g et h puisse vérifier les conditions de la propriété 5, on suppose à présent $j\in I$ et $\forall i\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}$ on note $D_i\cap D_j=\{(x_{ij},y_{ij})\}$, puisque $f(\sigma)=\min_{\mathcal{Z}}f$ on a $f(\sigma)=g(\sigma_1)\leq f(x_{ij},y_{ij})=g(x_{ij})$ avec x_{ij} qui est un zéro de g_i donc $g(\sigma_1)=\min\{g(x_{ij})|i\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}\}$ ainsi g admet un minimum en σ_1 sur $\mathbb{R}$ d'après la propriété 5 puis $\forall s\in D_j\cap S$ noté (s',s'') on a $f(\sigma)=g(\sigma_1)\leq g(s')=f(s)$ donc d'après l'étape (d) on peut conclure que f admet un minimum en σ sur $\mathbb{R}^2$, si g n'a pas pu être définie alors on peut reprendre le même raisonnement en utilisant h pour arriver à la même conclusion.

<u>Preuve - Théorème 1:</u> [Voir l'énoncé]

• Si d est une droite de $\mathscr{P}$ qui n'a pas pour vecteur directeur $\overrightarrow{j}$ alors on peut considérer a le coefficient directeur de d ainsi que b l'ordonnée à l'origine de d, le couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ sera alors appelé un paramétrage de d.

• $\forall N\in\mathcal{E}$ de coordonnées (x_N,y_N) on note f_N l'application $(a,b)\mapsto y_N-ax_N-b$ et on remarque qu'il s'agit d'une application affine de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ non constante, de plus l'ensemble $D_N=f_N^{-1}(\{0\})$ est l'ensemble des paramétrages des droites qui n'ont pas pour vecteur directeur $\overrightarrow{j}$ et qui passent par N, l'erreur d'approximation d'une droite d de $\mathscr{P}$ de paramétrage (a,b) pour approcher $\mathcal{E}$ est $\varepsilon(a,b)=\sum_{N\in\mathcal{E}}|f_N(a,b)|$.

• On va vérifier que l'application ε vérifie les conditions de la propriété 6, si P est un point de $\mathcal{E}$ distinct de N alors $|D_N\cap D_P|=1$ car le déterminant $-x_N\times(-1)-(-x_P)\times(-1)=x_N-x_P$ est non nul compte tenu du fait que les points de $\mathcal{E}$ ont des abscisses deux à deux différentes, d'après la propriété 6 on sait alors que ε admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et on a $\min_{\mathbb{R}^2}\varepsilon=\min_{\mathcal{Z}}\varepsilon$ avec $\mathcal{Z}=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|\exists(N,P)\in\mathcal{E}^2$ tel que $N\neq P$ et (a,b) paramétrage de $(MN)\}$.

• On pose $\forall i\in\mathbb{N}, A_i=\mathscr{H}^i(M)$ et on note $(a_i,b_i)\in\mathbb{R}^2$ le paramétrage de la droite (A_iA_{i+1}), la suite $(\varepsilon(a_i,b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'ensemble $\varepsilon(\mathcal{Z})$ qui est fini et cette suite est décroissante, en effet puisque $\mathscr{H}(A_i)=A_{i+1}$ cela signifie d'après la propriété 5 que parmi les droites passant par A_i celle qui passe par A_{i+1} minimise ε, de même parmi les droites passant par A_{i+1} celle qui passe par A_{i+2} minimise ε, on obtient ainsi $\varepsilon(a_{i+1},b_{i+1})\leq\varepsilon(a_i,b_i)$ puis la suite $(\varepsilon(a_i,b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est donc constante et égale à $\min_{\mathbb{R}^2}\varepsilon$ à partir d'un certain rang.

• D'après le point précédent on peut considérer $p=\min\{i\in\mathbb{N}|\varepsilon(a_i,b_i)=\min_{\mathbb{R}^2}\varepsilon\}$ et on va montrer que $\forall i\geq p, A_i$ est aligné avec A_p et A_{p+1}, en effet si ce n'est pas le cas alors $A_iA_pA_{p+1}$ est un triangle non aplati dont chaque côté constitue une droite optimale, puisque ε est convexe toute droite passant par un sommet du triangle $A_iA_pA_{p+1}$ coupant le côté opposé à ce sommet est alors optimale, on peut ainsi obtenir une droite optimale passant par le sommet d'abscisse intermédiaire dont le coefficient directeur est aussi élevé qu'on le souhaite ce qui est absurde.

5. PMS : IV.B.2.b.1.