Le graphe d'une fonction continue

Tearii CRIDLAND.

Référence utilisée :
"Panorama des mathématiques du supérieur" (PMS),
disponible aux éditions Ellipses.

Remarque 1: On va commencer ce cours en énonçant une propriété sur les connexes qui va nous être utile dans la suite. L'adhérence d'une partie A d'un espace vectoriel normé est notée $\overline{A}$.

Propriété 1: Si A est une partie connexe d'un espace vectoriel normé E alors toute partie B de E telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

Preuve : On raisonne par l'absurde en supposant que B n'est pas connexe, il existe alors X et Y deux ouverts de B non vides tels que $X \cup Y = B$ et $X \cap Y = \emptyset$. Comme $A \subset B \subset \overline{A}$ les ensembles $X \cap A$ et $Y \cap A$ sont des ouverts[1] de A non vides, il est clair que $(X \cap A) \cap (Y \cap A) = \emptyset$ et puisque $A \subset B$ on a aussi $(X \cap A) \cup (Y \cap A) = A$, on vient donc de construire une partition de A en deux ouverts de A ce qui est absurde compte tenu du fait que A est connexe.

Remarque 2: En particulier on peut choisir $B = \overline{A}$ pour en déduire que l'adhérence d'une partie connexe est connexe.

Définition 1: Soit A un ensemble et f une application de A vers un autre ensemble. On appelle **graphe** de f sur A l'ensemble $\{(x, f(x))|x \in A\}$.

Théorème 1: Soit A une partie connexe d'un espace vectoriel normé E et f une application de A vers un espace vectoriel normé F. Si f est continue sur A alors le graphe de f sur A est connexe.

Preuve : Considérons Id_E l'application identité de E puis l'application $g = (Id_E, f)$ de A vers $E \times F$. Il est clair que Id_E est continue et par hypothèse f est continue donc g est continue[2] sur A. Puisque l'image d'un connnexe par une application continue est[3] un connexe on déduit que $g(A)$ est connexe. On peut conclure puisque $g(A)$ est justement le graphe de f sur A.

Remarque 3: La réciproque du théorème précédent est fausse comme nous allons le voir dans le contre-exemple suivant.

Exemple 1: Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+$ en posant $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \sin(1/x)$ et $f(0) = 0$.

• On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2/(n\pi)$ et on remarque que u converge vers 0. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(u_{4n+1}) = \sin((4n+1)\pi/2) = \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$ et $f(u_{4n+3}) = \sin((4n+3)\pi/2) = \sin(3\pi/2 + 2n\pi) = -1$ donc les deux suites $(f(u_{4n+1}))_{n>0}$ et $(f(u_{4n+3}))_{n>0}$ convergent vers des limites différentes, comme il s'agit de deux suites extraites de la suite $f(u)$ cela signifie[4] que la suite $f(u)$ n'a pas de limite donc[5] que f n'est pas continue en 0. On vient de prouver que f n'est pas continue sur I.

• On va maintenant considérer $A = \{(x, f(x))|x \in \mathbb{R}_+^*\}$ le graphe de f sur $I \setminus \{0\}$ et montrer que l'adhérence de A est $\overline{A} = (\{0\} \times [-1; 1]) \cup A$. Commençons par vérifier que $(\{0\} \times [-1; 1]) \cup A \subset \overline{A}$ et comme[6] on a $A \subset \overline{A}$ il suffit de montrer qu'un élément de la forme $(0, y)$ avec $y \in [-1; 1]$ est dans $\overline{A}$. On peut[7] noter $c \in [0; 2\pi]$ tel que $\sin(c) = y$ puis en posant $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 1/(2n\pi + c)$ on remarque que $z_n = (v_n, f(v_n)) \in A$. La suite $f(v)$ est constante et égale à y puis la suite z converge vers $(0, y)$ donc[8] on a $(0, y) \in \overline{A}$. Il reste à vérifier l'inclusion réciproque, pour cela on considère un élément (α, β) dans $\overline{A}$ puis[8] on note $((a_n, f(a_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $(\alpha; \beta)$. Si on suppose que $\alpha = 0$ alors $f(a)$ étant à valeurs dans $[-1; 1]$ il est clair[9] que $\beta \in [-1; 1]$ puis que $(\alpha, \beta) \in \{0\} \times [-1; 1]$. Vu que a est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ il reste à traiter le cas où $\alpha > 0$, dans ce dernier cas $(\alpha, f(\alpha)) \in A$ et par continuité[10] de f sur $\mathbb{R}_+^*$ on sait[5] que $f(\alpha)$ est la limite de $f(a)$ c'est à dire β ainsi $(\alpha, \beta) \in A$.

1. PMS : II.C.1.j.7. 2. PMS : II.C.2.a.6. 3. PMS : II.C.3.i.6. 4. PMS : II.C.1.i.7. 5. PMS : II.C.2.c.3. 6. PMS : II.C.1.k.3. 7. PMS : VII.A.4.f.8. 8. PMS : VII.C.1.k.6. 9. PMS : VII.C.1.k.7. 10. PMS : II.C.2.c.8.

• Nous pouvons à présent vérifier que $G = \{(0,0)\} \cup A$ le graphe de f sur I est connexe. En effet A qui est le graphe de la fonction continue sur $I \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^*$ est connexe [11] d'après le théorème 1, de plus on a $A \subset G \subset \overline{A}$ compte tenu du point précédent donc on peut conclure que G est connexe d'après la propriété 1.

Remarque 4: On présente maintenant une propriété sur les graphes qui va nous être utile pour démontrer un second théorème.

Propriété 2: Soit A un ensemble ainsi que f et g des applications de A vers un autre ensemble B. Si le graphe de f sur A est inclus dans le graphe de g sur A alors on a $f = g$.

Preuve : Soit $x \in A$, le couple $(x, f(x))$ est dans le graphe de f donc dans le graphe de g par hypothèse, ainsi il existe $a \in A$ tel que $(x, f(x)) = (a, g(a))$, il vient alors $x = a$ donc $g(a) = g(x)$ puis $f(x) = g(x)$.

Théorème 2: Soit I un intervalle et f une application de I vers un espace vectoriel normé. Si le graphe de f sur I est connexe par arcs alors f est continue sur I.

Preuve : Si I est un singleton alors f est continue sur I, on suppose à présent dans la suite que l'intérieur de I est non vide, pour $\alpha \in I$ on peut noter $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $\alpha \in [a,b]$. Le graphe de f sur I noté G est connexe par arcs donc il existe une application γ de $[0,1]$ vers G telle que $\gamma(0) = (a, f(a))$ et $\gamma(1) = (b, f(b))$. L'application $\phi : x \mapsto (x-a)/(b-a)$ est continue [12] de $[a,b]$ vers $[0,1]$ et l'application $p : (x,y) \mapsto y$ est continue [13] de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. Comme le graphe de l'application $p \circ \gamma \circ \phi$ est inclus dans le graphe de f sur $[a,b]$ on déduit que $f = p \circ \gamma \circ \phi$ sur $[a,b]$ d'après la propriété 2, ainsi f est continue sur $[a,b]$ comme composée [10] d'applications continues puis f est continue en α.

Remarque 5: Comme une partie connexe par arcs est [14] connexe on peut résumer les théorèmes 1 et 2 dans le dernier théorème ci-dessous.

Théorème 3: Soit I un intervalle et f une application de I vers $\mathbb{R}$ ainsi que G le graphe de f sur I.

$$f \text{ continue sur } I \implies G \text{ connexe}$$
$$f \text{ continue sur } I \iff G \text{ connexe par arcs}$$

11. PMS : II.C.3.i.7. 12. PMS : II.C.4.b.1. 13. PMS : II.C.1.i.9. 14. PMS : II.C.3.i.5.