Résoudre une équation de degré 3

Méthode :

Une équation de degré 3 devient lorsque l'on divise des deux côtés par le **coefficient dominant** (nombre devant le terme à la puissance 3) :

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

Cette équation est notée (E).

Il faut ramener cette équation à sa **forme de Cardan** :

$$x^3 = 2p + 3qx$$

Cette équation est notée (C).

Pour ramener l'équation (E) à l'équation (C) il suffit de faire un changement de variable en posant :

$$x = z + \frac{a}{3}$$

Lorsque l'équation est sous sa forme de Cardan, on calcule ensuite son **discriminant** :

$$\Delta = p^2 - q^3$$

Si $\Delta > 0$ alors il y a une seule racine réelle et si $\Delta = 0$ alors il y a deux racines réelles. Dans les deux cas on peut noter δ une racine carrée réelle de Δ et une solution particulière de l'équation (C) est d'après la **formule de Cardan** :

$$\gamma = \sqrt[3]{p+\delta} + \sqrt[3]{p-\delta}$$

Si $\Delta < 0$ alors il y a trois racines réelles. Dans ce cas on peut noter δ une racine carrée complexe de Δ et d'après la formule de Cardan on a $\gamma = u + \bar{u}$ avec u une racine cubique complexe de $p + \delta$.

Si $p = 0$ alors l'équation (C) est triviale donc on peut supposer $p \neq 0$ et ainsi $\gamma \neq 0$. Pour factoriser l'équation (C) on va écrire la fonction polynôme sous deux formes égales :

$$x^3 - 3qx - 2p = (x - \gamma)\left(x^2 + \lambda x + \frac{2p}{\gamma}\right)$$

On développe le membre de droite de cette dernière égalité pour trouver la valeur de λ.

$$\begin{cases} \lambda - \gamma = 0 \\ \dfrac{2p}{\gamma} - \gamma\lambda = -3q \end{cases} \Rightarrow \lambda = \gamma$$

On résout ensuite l'équation de degré 2 ci-dessous pour terminer la résolution de (C) :

$$x^2 + \gamma x + \frac{2p}{\gamma} = 0$$

Cette équation est notée (C').

On n'oublie pas ensuite de résoudre l'équation (E) en utilisant le fait que :

$$z = x - \frac{a}{3}$$

Exemple :

On donne l'indication $(3+i)^3 = 18+26i$ (que l'on peut vérifier à la calculatrice) et on considère l'équation (E) de degré 3 suivante :

$$5\,z^3 + 30\,z^2 - 90\,z - 440 = 0$$

Elle est équivalente à l'équation ci-dessous en divisant par 5 des deux côtés :

$$z^3 + 6\,z^2 - 18\,z - 88 = 0$$

On note $x = z + \frac{6}{3} = z + 2$ donc $z = x - 2$ et l'équation devient :

$$(x-2)^3 + 6\,(x-2)^2 - 18\,(x-2) - 88 = 0$$

On développe pour obtenir l'équation (C) sous sa forme de Cardan :

$$x^3 - 30x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 30x + 36 \Leftrightarrow x^3 = 2 \times 18 + 3 \times 10x$$

Donc on a $(p,q) = (18{,}10)$ puis $\Delta = 18^2 - 10^3 = 324 - 1000 = -676 < 0$.

Une racine carrée de Δ est $\delta = 26i$ donc d'après la formule de Cardan il faut rechercher une racine cubique de $18 + 26i$ et d'après l'indication donnée au début de l'exemple une racine cubique est $3 + i$. De plus une racine cubique de $18 - 26i$ est $3 - i$ d'après les propriétés du conjugué d'un complexe.

Une solution de (C) est ainsi :

$$(3+i) + (3-i) = 6$$

On factorise l'équation (C) en utilisant le fait que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x^3 - 30x - 36 = (x-6)(x^2 + \lambda x + 6) = x^3 + \lambda x^2 + 6x - 6x^2 - 6\lambda x - 36$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} \lambda - 6 = 0 \\ 6 - 6\lambda = -30 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 6$$

La forme factorisée de (C) est donc :

$$x^3 - 30x - 36 = (x-6)(x^2 + 6x + 6)$$

Le discriminant de la fonction trinôme $x \mapsto x^2 + 6x + 6$ est $36 - 4 \times 1 \times 6 = 12$ et ses racines sont :

$$\frac{-6 \pm \sqrt{12}}{2} = -3 \pm \sqrt{3}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (C) est :

$$S_C = \left\{6; -3-\sqrt{3}; -3+\sqrt{3}\right\}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est en retranchant 2 (pour obtenir z) :

$$\boldsymbol{S_E = \left\{4; -5-\sqrt{3}; -5+\sqrt{3}\right\}}$$

Preuve de la méthode :

On reprend les notations de la méthode en considérant δ une racine carrée (éventuellement complexe) de Δ. Dans le cas où $\Delta \geq 0$ on note u une racine cubique de $p+\delta$ et v une racine cubique de $p-\delta$. Dans le cas où $\Delta < 0$ on note cette fois u une racine cubique de $p+\delta$ et v le conjugué de u. Dans les deux cas on a $\gamma = u+v$.

Lemme : $uv = q$

Cas 1 : $\Delta \geq 0$

On remarque que $(uv)^3 = u^3v^3 = (p+\delta)(p-\delta) = p^2-\delta^2 = p^2-\Delta = p^2-(p^2-q^3) = q^3$.

Rappelons que l'application cube de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est une bijection (cette application est strictement monotone) donc on peut conclure que $uv = q$.

Cas 2 : $\Delta < 0$

On a toujours $(uv)^3 = q^3$ et comme $uv \in \mathbb{R}$ on peut conclure comme précédemment que $uv = q$.

Théorème 1 : $\gamma = u+v$ est solution de (C).

On a d'après le lemme précédent $\gamma^3 = (u+v)^3 = (u+v)(u^2+v^2+2uv) = (u+v)(u^2+v^2+2q) = u^3 + uv^2+2uq+vu^2+v^3+2vq = 2q(u+v)+qv+qu+u^3+v^3 = 3q(u+v)+2p = 2p+3q\gamma$.

Théorème 2 : On considère Δ le discriminant de l'équation (C), si $\Delta > 0$ alors il y a une seule solution réelle, si $\Delta = 0$ alors il y a deux solutions réelles, si $\Delta < 0$ alors il y a trois solutions réelles.

Rappelons que si $p = 0$ alors l'équation (C) est triviale donc on peut supposer $p \neq 0$ et ainsi $\gamma \neq 0$.

On note Δ' le discriminant de l'équation du second degré (C'). Pour démontrer le théorème 2 il suffit de montrer que Δ et Δ' sont de signes différents.

On a $\Delta' = \gamma^2 - \frac{8p}{\gamma}$ et d'après le théorème 1 on sait que $\gamma^3 = 2p+3q\gamma$ donc $\gamma^2 = \frac{2p}{\gamma}+3q$.

On déduit que $\Delta' = \gamma^2 - \frac{8p}{\gamma} = \frac{2p}{\gamma}+3q-\frac{8p}{\gamma} = 3q - \frac{6p}{\gamma}$.

En utilisant le lemme et le fait que $u^3+v^3 = 2p$ on obtient que $\Delta' = 3uv - 3\frac{u^3+v^3}{u+v}$.

On remarque que l'identité $u^3+v^3 = (u+v)(u^2+v^2-uv)$ est valide.

On déduit que $\Delta' = 3uv - 3(u^2+v^2-uv) = -3(u^2+v^2-2uv) = -3(u-v)^2$.

Cas 1 : $\Delta > 0$

Les nombres u et v sont réels donc $\Delta' < 0$.

Cas 2 : $\Delta < 0$

Les nombres u et v sont des complexes conjugués donc on a $u - v = 2i\theta$ en notant θ la partie imaginaire de u puis on obtient $\Delta' = 12\theta^2 > 0$.

Cas 3 : $\Delta = 0$

Alors on a $u = v = \sqrt[3]{p}$ donc $\Delta' = 0$.

On peut ainsi conclure dans tous les cas que Δ et Δ' sont simultanément nuls ou de signes différents ce qui achève la preuve.

<u>Compléments :</u>

Question 1 : Pourquoi le changement de variable fonctionne-t-il pour obtenir la forme de Cardan ?

$$\begin{aligned} z^3 + az^2 + bz + c &= \left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c \\ &= \left(x - \frac{a}{3}\right)\left(x^2 + \frac{a^2}{9} - 2\frac{ax}{3}\right) + a\left(x^2 + \frac{a^2}{9} - 2\frac{ax}{3}\right) + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c \end{aligned}$$

Le terme de degré 2 dans la dernière égalité est donc :

$$-2\frac{ax^2}{3} - \frac{a}{3}x^2 + ax^2 = 0$$

Question 2 : Pourquoi l'équation (C) devient-elle triviale si $p = 0$?

En notant ω une racine carrée (éventuellement complexe) de $3q$ l'équation devient en effet :

$$x^3 = 2p + 3qx \Leftrightarrow x^3 - 3qx = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3q) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = \pm\omega)$$

Question 3 : Pourquoi a-t-on $p \neq 0 \Longrightarrow \gamma \neq 0$?

Il est plus simple de démontrer la contraposée de cette implication ainsi on suppose $\gamma = u + v = 0$.

<u>Cas 1 :</u> $\Delta \geq 0$

On a $\delta \in \mathbb{R}$ et on peut noter $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u^3 = p + \delta$ et $v^3 = p - \delta$. On sait que $u = -v$ donc $u^3 = -v^3$ puis $p + \delta = -(p - \delta)$ ce qui nous donne $p = 0$.

<u>Cas 2 :</u> $\Delta < 0$

On a $\delta \in i\mathbb{R}$ et $\gamma = u + v$ avec u une racine cubique complexe de $p + \delta$ et v le conjugué de u. Si on pose $\delta = i\delta'$ avec $\delta' \in \mathbb{R}$ alors $u^3 = p + i\delta'$ et $v^3 = p - i\delta'$. On sait que $u = -v$ donc $u^3 = -v^3$ puis $p + i\delta' = -(p - i\delta')$ ce qui nous donne $p = 0$.